

# Q A 批注式详答与详析

## 第一部分 教材同步分层练

### 第 26 章 二次函数

#### 26.1 二次函数

##### 刷基础

1. **B** 【解析】① $y = (x+1)^2 - x^2 = 2x+1$  是一次函数,不是二次函数,不符合题意;②不是二次函数,不符合题意;③是二次函数,符合题意;④当 $a=0$ 时, $y = bx+c$  不是二次函数,不符合题意;⑤ $y = 2x(x+1) = 2x^2+2x$  是二次函数,符合题意;⑥不是二次函数,不符合题意. 故选 B.

2. **D** 【解析】 $y = -2(x-1)^2 + (a-1)x^2 = (a-3)x^2+4x-2$ .  $\therefore$  函数  $y = (a-3)x^2+4x-2$  为二次函数, $\therefore a-3 \neq 0$ ,解得  $a \neq 3$ ,故选 D.

3. 【解】乙的说法正确. 理由如下: $a^2+4a+5 = a^2+4a+4+1 = (a+2)^2+1$ .  $\therefore (a+2)^2 \geq 0$ , $\therefore (a+2)^2+1 > 0$ , $\therefore$  无论  $a$  取何值, $a^2+4a+5 \neq 0$ , $\therefore$  此函数一定是二次函数,故乙的说法正确.

4. **A** 【解析】二次函数  $y = x^2-6x-1$  的二次项系数、一次项系数、常数项分别是 1, -6, -1. 故选 A.

5. **-1** 【解析】 $\because y = (x-2)(1-x) - 3x = -x^2-2$ , $\therefore$  该二次函数的二次项系数是 -1,一次项系数是 0, $\therefore$  二次项系数与一次项系数的和是 -1,故答案为 -1.

6. **-2 -3**  $y = x^2-2x-3$  **5** 【解析】将  $\begin{cases} x=-1, \\ y=0 \end{cases}$  和  $\begin{cases} x=3, \\ y=0 \end{cases}$  分别代入  $y = x^2+bx+c$ , 得  $\begin{cases} 1-b+c=0, \\ 9+3b+c=0, \end{cases}$  解得  $\begin{cases} b=-2, \\ c=-3, \end{cases}$   $\therefore$  该二次函数的表达式为  $y = x^2-2x-3$ . 当  $x = -2$  时, $y = (-2)^2-2 \times (-2)-3 = 5$ . 故答案为 -2, -3,  $y = x^2-2x-3$ , 5.

7. **C** 【解析】① $y = \frac{10}{x}$ ,  $y$  是  $x$  的反比例函数,故①不符合题意;② $y = 2\pi \times 5x = 10\pi x$ ,  $y$  是  $x$  的正比例函数,故②不符合题意;③ $y = (x-80) \cdot (100-2x) = 100x-2x^2-8\ 000+160x = -2x^2+260x-8\ 000$ ,  $y$  是  $x$  的二次函数,故③符合题意. 故选 C.

8. **B** 【解析】该厂第二季度平均每月的增长率为  $x$ ,则五月份生产零件  $60(1+x)$  万个,六月份生产零件  $60(1+x)^2$  万个. 依题意得  $y = 60+60(1+x)+60(1+x)^2$ . 故选 B.

9.  **$S = -4x^2+24x (0 < x < 6)$**  【解析】根据题意可

##### 总结

二次函数必须同时满足三个条件:(1)函数表达式是整式;(2)化简后自变量的最高次数是 2;(3)二次项系数不为 0.

##### 易错警示

二次函数的一般形式为  $y = ax^2+bx+c$  ( $a, b, c$  是常数,  $a \neq 0$ ),解此类题易只意识到要满足指数的要求,而忽略对二次项系数的限制,从而导致错误.

##### 技巧点拨

二次函数  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ) 中,  $|a|$  决定抛物线的开口大小,  $|a|$  越大,开口越小;  $|a|$  越小,开口越大.

知,三间羊圈与旧墙平行的一边的总长为  $(24-4x)$  m,则  $S = (24-4x)x = -4x^2+24x$ . 由题图可知, $\begin{cases} 24-4x > 0, \\ x > 0, \end{cases}$  所以  $x$  的取值范围是  $0 < x < 6$ ,故答案为  $S = -4x^2+24x (0 < x < 6)$ .

##### 刷易错

10.  **$\frac{1}{4}$**  【解析】由题意得  $k^2-3k+4=2$ ,则  $k^2-3k+2=0$ ,即  $(k-1)(k-2)=0$ ,解得  $k_1=1$ ,  $k_2=2$ .  $\because k-1 \neq 0$ , $\therefore k=2$ . 把  $k=2$  代入  $y = (k-1)x^{k^2-3k+4}+2x-1$  得  $y = x^2+2x-1$ ,当  $x = 0.5$  时, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^2+2 \times \frac{1}{2}-1 = \frac{1}{4}$ . 故答案为  $\frac{1}{4}$ .

#### 26.2 二次函数的图象与性质

##### 1. 二次函数 $y = ax^2$ 的图象与性质

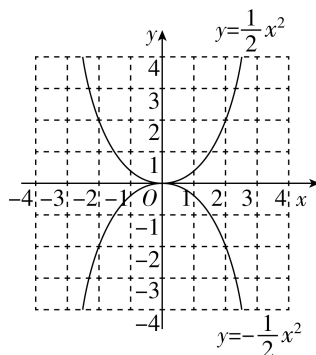
##### 刷基础

1. **A** 【解析】将  $P(1, n)$  代入  $y = 3x^2$ ,得  $n = 3 \times 1^2 = 3$ ,故选 A.

2. **A** 【解析】二次函数  $y = ax^2$  中,  $|a|$  的值越小,函数图象的开口越大.  $\because \left|\frac{1}{3}\right| < |-2| < |-3| < |4|$ , $\therefore$  抛物线  $y = \frac{1}{3}x^2$ ,  $y = -3x^2$ ,  $y = -2x^2$ ,  $y = 4x^2$  中,开口最大的是抛物线  $y = \frac{1}{3}x^2$ . 故选 A.

3.  **$k > -2$**  【解析】由题图可知,抛物线的开口方向向上,则  $k+2 > 0$ ,解得  $k > -2$ . 故答案为  $k > -2$ .

4. 【解】(1)二次函数  $y = \frac{1}{2}x^2$  和  $y = -\frac{1}{2}x^2$  的图象如图所示:



(2) 二次函数  $y = \frac{1}{2}x^2$  和  $y = -\frac{1}{2}x^2$  的图象的相同点: 形状都是抛物线, 对称轴都是  $y$  轴, 顶点坐标都是  $(0, 0)$ ; 二次函数  $y = \frac{1}{2}x^2$  和  $y = -\frac{1}{2}x^2$  的图象的不同点:  $y = \frac{1}{2}x^2$  的图象开口向上,  $y = -\frac{1}{2}x^2$  的图象开口向下.

5. **A** 【解析】 $\because$  二次函数  $y = ax^2$  的图象的对称轴为  $y$  轴,  $\therefore$  若图象经过点  $P(-2, 4)$ , 则该图象必经过点  $(2, 4)$ . 故选 A.

6. **C** 【解析】

$a > 0$ , 图象开口向上,  $a < 0$ , 图象开口向下, A 则  $y = -2x^2$  与  $y = -x^2$  的图象开口向下, A 选项错误

开口向上时, 图象有最低点, 开口向下时, B 图象有最高点,  $y = \frac{1}{3}x^2$  与  $y = 3x^2$  的图象有最低点, B 选项错误

$y = ax^2 (a \neq 0)$  的图象的对称轴是  $y$  轴, C 选项正确

开口向上时, 在对称轴右侧,  $y$  随  $x$  的增大而增大; 开口向下时, 在对称轴左侧,  $y$  随  $x$  的增大而增大, D 选项错误

7. **C** 【解析】 $\because$  函数  $y = -x^2$  的图象开口向下,  $\therefore$  当  $x > 0$  时,  $y$  随  $x$  的增大而减小.  $\therefore a > 1$ ,  $\therefore a+1 > a > a-1 > 0$ . 又  $\because$  点  $(a-1, y_1)$ ,  $(a, y_2)$ ,  $(a+1, y_3)$  都在函数  $y = -x^2$  的图象上,  $\therefore y_3 < y_2 < y_1$ . 故选 C.

8.  $m < 3$  【解析】 $\because$  当  $0 < x_1 < x_2$  时, 有  $y_1 > y_2$ ,  $\therefore m-3 < 0$ ,  $\therefore m < 3$ . 故  $m$  的取值范围是  $m < 3$ .

9. **3** 【解析】 $\because$  函数  $y = 3x^2$  与  $y = -3x^2$  的图象关于  $x$  轴对称,  $\therefore$  题图中阴影部分的面积是正方形面积的一半.  $\because$  边长为  $\sqrt{6}$  的正方形的面积为 6,  $\therefore$  题图中阴影部分的面积是 3. 故答案为 3.

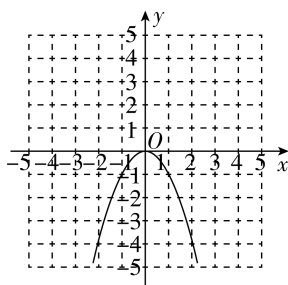
10. 【解】(1) 由  $y = (k+2)x^{k^2+k-4}$  是二次函数, 且当  $x < 0$  时,  $y$  随  $x$  的增大而增大, 得  $\begin{cases} k^2+k-4=2, \\ k+2 < 0, \end{cases}$  解得  $k = -3$ ,  $\therefore$  二次函数的表达式为  $y = -x^2$ .

(2)  $y = -x^2$  的图象

如图所示.

由图象可知, 顶点坐标是  $(0, 0)$ , 对称轴是  $y$  轴.

(3)  $\because$  点  $A(1, t)$  在该二次函数图象上,  $\therefore t = -1^2 =$



### 思路分析

先确定出二次函数图象的对称轴为  $y$  轴, 再根据二次函数图象的对称性进行解答.

### 关键点拨

当  $x = 1$  时, 函数值分别等于各函数的二次项系数, 根据图象, 比较各对应点纵坐标的大小即可.

### 关键点拨

函数  $y = 3x^2$  与  $y = -3x^2$  的图象关于  $x$  轴对称, 所以阴影部分的面积为边长为  $\sqrt{6}$  的正方形面积的一半.

$-1$ ,  $\therefore$  点  $A$  的坐标为  $(1, -1)$ ,  $\therefore$  点  $A$  关于该函数图象的对称轴对称的点的坐标为  $(-1, -1)$ .

(4)  $\because$  点  $P(m, n)$  是该二次函数图象上一点, 且  $-2 \leq m \leq 1$ ,  $\therefore$  当  $m = -2$  时,  $n = -(-2)^2 = -4$ , 当  $m = 1$  时,  $n = -1^2 = -1$ .  $\therefore$  当  $m = 0$  时,  $n$  取最大值, 为 0,  $\therefore$  当  $-2 \leq m \leq 1$  时,  $-4 \leq n \leq 0$ .

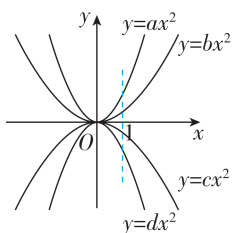


### 刷提升

1. **D** 【解析】由点  $A(-1, m)$ ,  $B(1, m)$  可知, 点  $A$  与点  $B$  关于  $y$  轴对称, 故 A、B 选项不符合题意.  $\because 2 > 1, m-10 < m$ ,  $\therefore$  在对称轴的右侧  $y$  随  $x$  的增大而减小, 故函数图象开口向下.  $\therefore a^2 - 2a + 2 = (a-1)^2 + 1 \geq 1, -2 - a^2 \leq -2$ , 故 C 选项不符合题意, D 选项符合题意, 故选 D.

2. **A** 【解析】当  $a > 0$  时,  $y = ax^2$  的图象是抛物线, 顶点在原点, 开口向上, 函数  $y = ax + a$  的图象是一条直线, 经过第一、二、三象限; 当  $a < 0$  时,  $y = ax^2$  的图象是抛物线, 顶点在原点, 开口向下, 函数  $y = ax + a$  的图象是一条直线, 经过第二、三、四象限, 故选项 A 正确, 故选 A.

3.  $d < c < b < a$  【解析】如图, 作直线  $x = 1$ . 因为直线  $x = 1$  与四条抛物线的交点从上到下依次为  $(1, a)$ ,  $(1, b)$ ,  $(1, c)$ ,  $(1, d)$ , 所以  $a > b > c > d$ . 故答案为  $d < c < b < a$ .



4. 1 (答案不唯一) 【解析】因为当  $x = -1$  时,  $y < 2$ , 即  $a < 2$ ; 当  $x = 2$  时,  $y > 3$ , 即  $4a > 3$ , 解得  $a > \frac{3}{4}$ , 所以  $\frac{3}{4} < a < 2$ . 故答案为 1 (答案不唯一).

5.  $\frac{1}{2}$  或  $-\frac{1}{2}$  【解析】令  $AB$  与  $y$  轴的交点为  $D$ .  $\because$  点  $A, B$  均在抛物线  $y = ax^2$  上,  $AB = 2$ , 且  $AB \perp y$  轴,  $\therefore AD = BD = 1$ ,  $\therefore$  点  $A, B$  的纵坐标均为  $a$ ,  $\therefore OD = |a|$ .  $\therefore \tan \angle OAB = \frac{1}{2}$ ,  $\therefore \frac{OD}{AD} = \frac{1}{2}$ ,  $\therefore \frac{|a|}{1} = \frac{1}{2}$ ,  $\therefore a = \pm \frac{1}{2}$ . 故答案为  $\frac{1}{2}$  或  $-\frac{1}{2}$ .

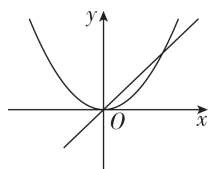
6. 1 (答案不唯一) 【解析】由  $\begin{cases} y = x, \\ y = x^2 \end{cases}$  解得

$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0 \end{cases}$  或  $\begin{cases} x = 1, \\ y = 1 \end{cases}$ ,  $\therefore$  函数  $y_1 = x$  的图象与函数

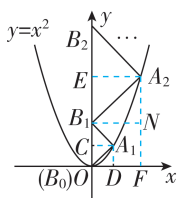
$y_2 = x^2$  的图象的交点为  $(0, 0)$  和  $(1, 1)$ , 如图.

$\therefore$  函数  $y_1 = x (x < m)$  的图象与函数  $y_2 = x^2 (x \geq m)$  的图

象组成图形  $G$ , 对于任意实数  $n$ , 过点  $P(0, n)$  且与  $x$  轴平行的直线总与图形  $G$  有公共点,  $\therefore 0 \leq m \leq 1$ , 故答案为 1 (答案不唯一).



**7. 2 023 $\sqrt{2}$**  【解析】如图,作  $A_1C \perp y$  轴,  $A_1D \perp x$  轴,  $A_2E \perp y$  轴, 垂足分别为  $C, D, E$ .  
 $\because \triangle A_1B_0B_1, \triangle A_2B_1B_2$  都是等腰直角三角形,  $\therefore B_1C = B_0C = DB_0 = A_1D, B_2E = B_1E$ ,  
 $\therefore$  设  $A_1(a, a)$ . 将点  $A_1$  的坐标代入  $y = x^2$  得  $a = a^2$ , 解得  $a = 0$  (不合题意, 舍去) 或  $a = 1$ ,  
 $\therefore A_1(1, 1)$ , 则  $B_1B_0 = 2$ . 由勾股定理得  $A_1B_0 = \sqrt{2}$ . 过  $A_2$  作  $A_2F \perp x$  轴于  $F$ , 过  $B_1$  作  $B_1N \perp A_2F$  于  $N$ . 设点  $A_2(x_2, y_2)$ , 可得  $A_2N = y_2 - 2$ ,  $B_1N = x_2 = y_2 - 2$ . 又  $\because$  点  $A_2$  在抛物线上,  $\therefore y_2 = x_2^2$ , 即  $x_2 + 2 = x_2^2$ , 解得  $x_2 = 2$  或  $x_2 = -1$  (不合题意, 舍去), 则  $A_2B_1 = 2\sqrt{2}$ . 同理可得  $A_3B_2 = 3\sqrt{2}, A_4B_3 = 4\sqrt{2}, \dots, \therefore A_{2\ 023}B_{2\ 022} = 2\ 023\sqrt{2}$ ,  
 $\therefore \triangle A_{2\ 023}B_{2\ 022}B_{2\ 023}$  的腰长为  $2\ 023\sqrt{2}$ . 故答案为  $2\ 023\sqrt{2}$ .



**关键点拨**  
 利用等腰直角三角形和点的坐标关系求出第一、二个等腰直角三角形的腰长, 观察规律可得结论.

**刷素养**

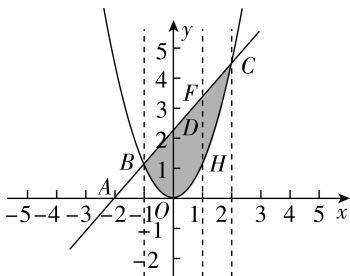
**8. 【解】**(1) 令  $y = a(x+2) = 0$ , 得  $x = -2$ , 则  $A$  点的坐标为  $(-2, 0)$ .

(2) 联立直线  $l: y = a(x+2)$  与抛物线  $E: y = ax^2$  得  $\begin{cases} y = a(x+2) \\ y = ax^2 \end{cases}$ ,  $\therefore x^2 - x - 2 = 0$ ,  $\therefore x = -1$  或  $x = 2$ ,  $\therefore B(-1, a), C(2, 4a)$ .  $\because B$  点关于  $x$  轴的对称点为  $B'$  点,  $\therefore B'(-1, -a)$ ,  $\therefore AB'^2 = (-2+1)^2 + (0+a)^2 = a^2 + 1, AC^2 = (2+2)^2 + (4a-0)^2 = 16a^2 + 16, B'C^2 = (2+1)^2 + (4a+a)^2 = 25a^2 + 9$ .

若  $\angle CAB' = 90^\circ$ , 则  $AB'^2 + AC^2 = B'C^2$ , 即  $a^2 + 1 + 16a^2 + 16 = 25a^2 + 9$ ,  $\therefore a = 1$  (负值已舍去); 若  $\angle AB'C = 90^\circ$ , 则  $AB'^2 + B'C^2 = AC^2$ , 即  $a^2 + 1 + 25a^2 + 9 = 16a^2 + 16$ ,  $\therefore a = \frac{\sqrt{15}}{5}$  (负值已舍去); 若  $\angle ACB' = 90^\circ$ , 则  $AC^2 + B'C^2 = AB'^2$ , 即  $16a^2 + 16 + 25a^2 + 9 = a^2 + 1$ , 此方程无实数解.

综上所述,  $a = 1$  或  $\frac{\sqrt{15}}{5}$ .

(3) 如图, 直线  $l$  与抛物线  $E$  所围成的封闭图形 (即阴影部分, 不包含边界) 内的整点只能落在  $y$  轴和直线  $x = 1$  上.



$\because D(0, 2a), H(1, a), F(1, 3a)$ ,  $\therefore OD = HF = 2a$ .  $\because$  整点恰好是 26 个,  $\therefore$  落在  $y$  轴和直线  $x = 1$  上的整点应各为 13 个. 由落在  $y$  轴上的整点有 13 个得  $13 < 2a \leq 14$ , 即  $\frac{13}{2} < a \leq 7$ . ①若

$\frac{13}{2} < a < 7$ , 则  $\frac{13}{2} < y_H < 7$ ,  $\therefore$  线段  $HF$  上的整点应 该为  $(1, 7), (1, 8), \dots, (1, 19)$ ,  $\therefore 19 < 3a \leq 20$ ,  $\therefore \frac{19}{3} < a \leq \frac{20}{3}$ ,  $\therefore \frac{13}{2} < a \leq \frac{20}{3}$ ; ②若  $a = 7$ , 则  $y_H = 7, y_F = 21$ ,  $\therefore$  线段  $HF$  上的整点正好有 13 个. 综上,  $\frac{13}{2} < a \leq \frac{20}{3}$  或  $a = 7$ .

**2. 二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  的图象与性质**

**课时 1 二次函数  $y = ax^2 + k$  的图象与性质**



**刷基础**

**1. C** 【解析】二次函数  $y = -2x^2 + 1$  的图象开口 向下, 对称轴为  $y$  轴, 顶点在  $y$  轴的正半轴上, 故 C 正确. 故选 C.

**2. A** 【解析】

	顶点坐标	对称轴	开口方向	形状
$y = -x^2 + 3$	$(0, 3)$	$y$ 轴	向下	$a = -1$ , 抛物线
$y = -x^2 - 2$	$(0, -2)$	$y$ 轴	向下	$a = -1$ , 抛物线
是否相同	不同	相同	相同	相同

**3. D** 【解析】函数  $y = \frac{1}{4}x^2 + 2$  的图象开口向上, 顶点坐标为  $(0, 2)$ , 对称轴为  $y$  轴, 当  $x > 0$  时,  $y$  随  $x$  的增大而增大, 故 A、B 选项不符合题意, D 选项符合题意. 该函数图象开口向上,  $y$  没有最大值, 故 C 选项不符合题意. 故选 D.

**4.  $y_3 < y_2 < y_1$**  【解析】函数  $y = x^2 + k$  的图象开口 向上, 对称轴为  $y$  轴,  $\therefore A(-4, y_1)$  与点  $(4, y_1)$  关于  $y$  轴对称.  $\because$  当  $x > 0$  时,  $y$  随  $x$  的增大而增 大, 且  $1 < 2 < 4$ ,  $\therefore y_3 < y_2 < y_1$ , 故答案为  $y_3 < y_2 < y_1$ .

**5.  $-17 \leq y \leq 3$**  【解析】二次函数  $y = -5x^2 + 3$  的 图象开口向下, 对称轴为  $y$  轴, 当  $x = 0$  时,  $y$  有 最大值, 为 3.  $\because -2 \leq x \leq 1$ , 且  $|-2-0| > |1-0|$ ,  $\therefore$  当  $x = -2$  时,  $y$  有最小值, 为  $-5 \times (-2)^2 + 3 = -17$ ,  $\therefore y$  的取值范围是  $-17 \leq y \leq 3$ . 故答案 为  $-17 \leq y \leq 3$ .

**6. 【解】**(1) 根据题意可得  $A(0, k)$ , 则当  $y = k$  时,  $\frac{1}{3}x^2 = k$ , 解得  $x = \pm\sqrt{3k}$ , 则  $BC = \sqrt{3k} - (-\sqrt{3k}) = 6$ , 解得  $k = 3$ .  
 (2) 由图象的性质得,  $x = -2$  时,  $y_1 = -1, x = 0$  时,  $y_1 = 3$ ,  $\therefore \begin{cases} (-2)^2 a + k = -1 \\ k = 3 \end{cases}$ , 解得  $\begin{cases} a = -1 \\ k = 3 \end{cases}$ ,  $\therefore a$  的值为  $-1$ .

**7. D** 【解析】将抛物线  $y = x^2$  向下平移 3 个单 位得到抛物线  $y = x^2 - 3$ , 故选 D.

**8. (0, 5)** 【解析】将抛物线  $y = 3x^2$  向上平移 5 个单位所得抛物线为  $y = 3x^2 + 5$ , 所以其顶点 坐标为  $(0, 5)$ , 故答案为  $(0, 5)$ .

**9.8 【解析】**由题意得抛物线  $y_1, y_2$  的顶点坐标分别为  $(0, 1), (0, -1)$ . 因为两条抛物线表达式的二次项系数相同, 所以两条抛物线的形状完全相同, 所以过点  $(0, -1)$  且平行于  $x$  轴的直线与抛物线  $y_1 = -\frac{1}{2}x^2 + 1$  围成的图形与过点  $(0, -3)$  且平行于  $x$  轴的直线与抛物线  $y_2 = -\frac{1}{2}x^2 - 1$  围成的图形形状、大小相同, 故把抛物线  $y_1 = -\frac{1}{2}x^2 + 1$  与直线  $y = -1$  之间的阴影部分向下平移 2 个单位, 即可与剩余的阴影部分拼成一个矩形, 因此阴影部分的面积为  $4 \times 2 = 8$ .

**刷易错**

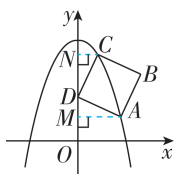
**10. B 【解析】**抛物线  $y = 2x^2$  的顶点坐标为  $(0, 0)$ .  $\therefore$  将  $x$  轴向上平移 1 个单位 ( $y$  轴不动),  $\therefore$  在新坐标系中抛物线的顶点坐标为  $(0, -1)$ ,  $\therefore$  在新坐标系中抛物线的表达式是  $y = 2x^2 - 1$ . 故选 B.

**刷提升**

**1. A 【解析】**A 选项, 由一次函数  $y = ax - b$  的图象可得,  $a > 0, -b > 0$ , 此时二次函数  $y = -ax^2 - b$  的图象应该开口向下, 顶点的纵坐标大于零, 故 A 正确; B 选项, 由一次函数  $y = ax - b$  的图象可得,  $a < 0, -b > 0$ , 此时二次函数  $y = -ax^2 - b$  的图象应该开口向上, 顶点的纵坐标大于零, 故 B 错误; C 选项, 由一次函数  $y = ax - b$  的图象可得,  $a < 0, -b > 0$ , 此时二次函数  $y = -ax^2 - b$  的图象应该开口向上, 故 C 错误; D 选项, 由一次函数  $y = ax - b$  的图象可得,  $a > 0, -b > 0$ , 此时二次函数  $y = -ax^2 - b$  的图象应该开口向下, 顶点的纵坐标大于零, 故 D 错误. 故选 A.

**2. C 【解析】**抛物线  $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$  的顶点坐标为  $A(0, -1)$ , 对称轴为  $y$  轴. 根据题意可知,  $A_6$  与点  $A$  重合, 即  $A_6(0, -1)$ ,  $\therefore$  根据对称性质可得  $A_2$  与  $A_{10}, A_3$  与  $A_9, A_4$  与  $A_8, A_5$  与  $A_7$  都关于点  $A$  对称,  $\therefore \frac{y_2 + y_{10}}{2} = \frac{y_3 + y_9}{2} = \frac{y_4 + y_8}{2} = \frac{y_5 + y_7}{2} = -1$ ,  $\therefore y_2 + y_{10} = y_3 + y_9 = y_4 + y_8 = y_5 + y_7 = -2$ . 又  $\because y_1 = \frac{1}{4} \times (-5)^2 - 1 = \frac{21}{4}, y_6 = -1$ ,  $\therefore y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_9 + y_{10} = 4 \times (-2) + \frac{21}{4} + (-1) = -\frac{15}{4}$ , 故选 C.

**3. B 【解析】**如图, 过点  $A$  作  $AM \perp y$  轴于点  $M$ , 过点  $C$  作  $CN \perp y$  轴于点  $N$ ,  $\therefore \angle DNC = \angle AMD = 90^\circ$ ,  $\therefore \angle ADM +$



**思路分析**

过点  $A$  作  $AM \perp y$  轴于点  $M$ , 过点  $C$  作  $CN \perp y$  轴于点  $N$ . 先证明  $\triangle CND \cong \triangle DMA$ , 可得  $AM = DN = m, DM = CN = n$ . 再根据  $A(m, -m^2 + 6), C(n, -n^2 + 6)$ , 得出  $ON = -n^2 + 6, OM = -m^2 + 6$ . 最后由  $ON = OM + MD + DN$  列出关于  $m, n$  的等式即可求解.

**易错警示**

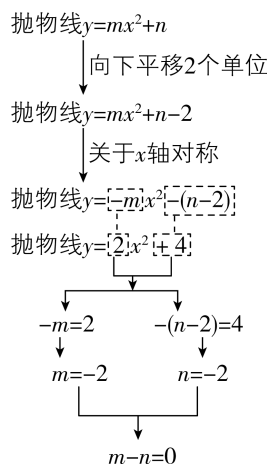
坐标系平移之后函数表达式的求解规则与函数图象的“上加下减”“左加右减”规则恰好相反, 切勿搞混.

**关键点拨**

根据二次函数的性质及对称性质可得到  $A_2$  与  $A_{10}, A_3$  与  $A_9, A_4$  与  $A_8, A_5$  与  $A_7$  都关于点  $A$  对称, 再根据中心对称性质得到  $y_2 + y_{10} = y_3 + y_9 = y_4 + y_8 = y_5 + y_7 = -2$  是本题解题的关键.

$\angle DAM = 90^\circ$ .  $\therefore$  四边形  $ABCD$  是正方形,  $\therefore CD = AD, \angle ADC = 90^\circ, \therefore \angle ADM + \angle NDC = 90^\circ, \therefore \angle CDN = \angle DAM, \therefore \triangle CND \cong \triangle DMA$ ,  $\therefore AM = DN = m, DM = CN = n$ .  $\therefore$  点  $A, C$  的横坐标分别为  $m, n$ , 且都在抛物线  $y = -x^2 + 6$  上,  $\therefore A(m, -m^2 + 6), C(n, -n^2 + 6), \therefore ON = -n^2 + 6, OM = -m^2 + 6. \therefore ON = OM + MD + DN, \therefore -m^2 + 6 + m + n = -n^2 + 6, \therefore (m + n)(m - n) = m + n. \therefore m > n > 0, \therefore m + n \neq 0, \therefore m - n = 1$ . 故选 B.

**4. 0 【解析】**



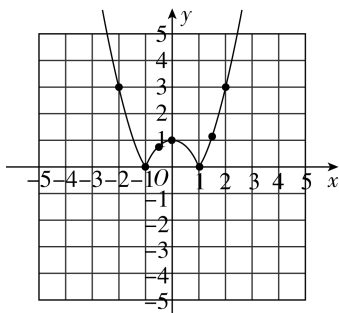
**5.  $\frac{2}{5}$  【解析】**把  $y = 0$  代入  $y = -\frac{4}{5}x^2 + 1$  得  $0 = -\frac{4}{5}x^2 + 1$ , 解得  $x_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}, x_2 = -\frac{\sqrt{5}}{2}$ ,  $\therefore$  抛物线  $y = -\frac{4}{5}x^2 + 1$  与  $x$  轴的交点坐标为  $(\frac{\sqrt{5}}{2}, 0), (-\frac{\sqrt{5}}{2}, 0)$ . 把  $(\frac{\sqrt{5}}{2}, 0)$  代入  $y = kx^2 - 2$ , 得  $0 = \frac{5}{4}k - 2$ , 解得  $k = \frac{8}{5}$ ,  $\therefore y = \frac{8}{5}x^2 - 2$ . 将抛物线  $y = -\frac{4}{5}x^2 + 1$  向下平移  $\frac{1}{5}$  个单位后表达式为  $y = -\frac{4}{5}x^2 + \frac{4}{5}$ . 把  $y = 0$  代入  $y = -\frac{4}{5}x^2 + \frac{4}{5}$  得  $0 = -\frac{4}{5}x^2 + \frac{4}{5}$ , 解得  $x = \pm 1$ ,  $\therefore$  抛物线  $y = -\frac{4}{5}x^2 + \frac{4}{5}$  与  $x$  轴的交点坐标为  $(1, 0), (-1, 0)$ . 把  $x = 1$  代入  $y = \frac{8}{5}x^2 - 2$  得  $y = -\frac{2}{5}$ ,  $\therefore$  抛物线  $y = \frac{8}{5}x^2 - 2$  经过点  $(1, -\frac{2}{5})$ ,  $\therefore$  把抛物线  $y = \frac{8}{5}x^2 - 2$  向上平移  $\frac{2}{5}$  个单位后抛物线经过点  $(1, 0)$ , 故答案为  $\frac{2}{5}$ .

**刷素养**

**6. (1)  $\frac{5}{4}, \frac{3}{4}$**



【解】(2)描点、连线,画出函数图象如图:



(3)①由图象可知,如果  $y$  随  $x$  的增大而增大,则  $x$  的取值范围是  $x > 1$  或  $-1 < x < 0$ . 故答案为  $x > 1$  或  $-1 < x < 0$ .

②当函数  $y = |x^2 - 1|$  与  $y = k$  的图象有两个交点时,由图象得  $k$  的取值范围是  $k > 1$  或  $k = 0$ . 故答案为  $k > 1$  或  $k = 0$ .

(4)  $\because |n| < |m| < 1, \therefore 0 < n^2 < m^2 < 1, \therefore -1 < n^2 - 1 < m^2 - 1 < 0, \therefore 1 > |n^2 - 1| > |m^2 - 1| > 0$ . 又  $\because c = |m^2 - 1|, d = |n^2 - 1|, \therefore c > d$ . 故答案为  $c > d$ .

**技巧点拨**  
(4) 由  $|n| < |m| < 1$  可得  $1 > |n^2 - 1| > |m^2 - 1| > 0$ , 即可知  $c$  与  $d$  的大小关系.

## 课时2 二次函数 $y = a(x-h)^2$ 的图象与性质

### 刷基础

1. **D** 【解析】二次函数  $y = 2(x-2)^2$  的图象是由  $y = 2x^2$  的图象向右平移得到的, 抛物线的顶点坐标为  $(2, 0)$ , 故选 D.

2. **A** 【解析】  $\because y = -3(x+2)^2, \therefore$  抛物线开口向下, 对称轴为直线  $x = -2$ , 顶点坐标为  $(-2, 0), \therefore$  抛物线经过第三、四象限, 不经过第一、二象限. 故选 A.

3. **B** 【解析】二次函数  $y = -2(x+3)^2$  的图象开口向下, 对称轴为直线  $x = -3$ , 顶点坐标为  $(-3, 0)$ , 当  $x < -3$  时,  $y$  随  $x$  的增大而增大; 当  $x > -3$  时,  $y$  随  $x$  的增大而减小. 故选 B.

4. **C** 【解析】抛物线  $y = \frac{1}{3}(x+1)^2$  的对称轴为直线  $x = -1$ . 设  $A(0, b), \therefore BC = 6, \therefore B(-4, b)$ . 把  $B(-4, b)$  代入  $y = \frac{1}{3}(x+1)^2$ , 得  $b = \frac{1}{3} \times (-4+1)^2 = 3, \therefore A(0, 3)$ . 故选 C.

5.  $y_2 > y_3 > y_1$  【解析】  $\because y = -2(x-1)^2, -2 < 0, \therefore$  函数图象开口向下, 对称轴为直线  $x = 1, \therefore$  当  $x < 1$  时,  $y$  随  $x$  的增大而增大; 当  $x > 1$  时,  $y$  随  $x$  的增大而减小.  $\therefore$  二次函数  $y = -2(x-1)^2$  的图象上有三个点  $A(-1, y_1), B(1, y_2), C(2, y_3), | -1 - 1 | = 2, | 1 - 1 | = 0, | 2 - 1 | = 1, \therefore y_2 > y_3 > y_1$ , 故答案为  $y_2 > y_3 > y_1$ .

6. **-9** 【解析】二次函数  $y = -(x+h)^2$ , 当  $x < -3$  时,  $y$  随  $x$  的增大而增大, 当  $x > -3$  时,  $y$  随  $x$  的增大而减小,  $\therefore h = 3, \therefore$  当  $x = 0$  时,  $y = -(0+3)^2 = -9$ . 故答案为 -9.

7. **1** 【解析】  $\because$  二次函数  $y = 2(x-1)^2, \therefore$  顶点 A

**关键点拨**  
根据对称轴为直线  $x = -1, BC = 6$ , 得到点 B 的横坐标为 -4 是本题解题的关键.

的坐标为  $(1, 0)$ , 点 B 的坐标为  $(0, 2), \therefore OA = 1, OB = 2, \therefore \triangle ABO$  的面积为  $\frac{1}{2}OA \cdot$

$$OB = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1.$$

8. 【解】(1)  $\because$  抛物线  $y = a(x-h)^2$ , 当  $x = 2$  时,  $y$  有最大值,  $\therefore$  抛物线的表达式为  $y = a(x-2)^2$ .  $\because$  抛物线过点  $(1, -3), \therefore -3 = a(1-2)^2$ , 解得  $a = -3, \therefore$  抛物线的表达式为  $y = -3(x-2)^2$ .

(2)  $\because$  抛物线的对称轴为直线  $x = 2$ , 且抛物线开口向下,  $\therefore$  当  $x < 2$  时,  $y$  随  $x$  的增大而增大.

(3) 当  $x = 0$  时,  $y = -3 \times (0-2)^2 = -12, \therefore$  抛物线  $y = -3(x-2)^2$  与  $y$  轴的交点坐标为  $(0, -12)$ .

9. **D** 【解析】根据函数图象的平移规律“左加右减自变量, 上加下减常数项”, 可得由抛物线  $y = x^2$  得到抛物线  $y = (x-2)^2$  的平移方式是向右平移 2 个单位长度. 故选 D.

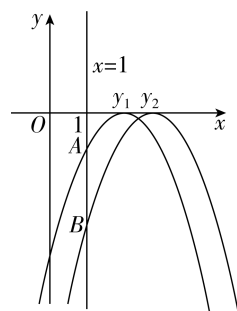
10. **-1** 【解析】将抛物线  $y = ax^2$  向左平移 2 个单位长度后得到抛物线  $y = a(x+2)^2$ .  $\because$  抛物线平移后经过点  $(-4, -4), \therefore -4 = a(-4+2)^2$ , 解得  $a = -1$ , 故答案为 -1.

11.  $y_1 > y_2$  【解析】当  $y = 0$  时,  $x+1 = 0$ , 解得  $x = -1, \therefore A(-1, 0)$ .  $\because$  抛物线  $y = -2x^2$  平移后的顶点为  $A(-1, 0), \therefore$  平移后抛物线的表达式为  $y = -2(x+1)^2$ .  $\because$  平移后的抛物线  $y = -2(x+1)^2$  的对称轴为直线  $x = -1$ , 开口向下,  $\therefore$  当  $x < -1$  时,  $y$  随  $x$  的增大而增大; 当  $x > -1$  时,  $y$  随  $x$  的增大而减小.  $\therefore -\frac{1}{2} < x_1 < x_2, \therefore y_1 > y_2$ . 故答案为  $y_1 > y_2$ .

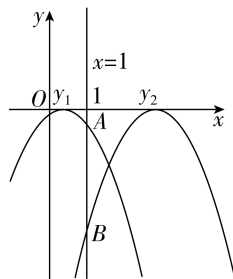
### 刷提升

1. **D** 【解析】抛物线  $y = a(x+1)^2$  是由抛物线  $y = ax^2$  向左平移 1 个单位长度得到的, 则  $P(m, n)$  平移后的对应点为  $(m-1, n), \therefore$  点  $(m-1, n)$  一定在抛物线  $y = a(x+1)^2$  上, 故选 D.

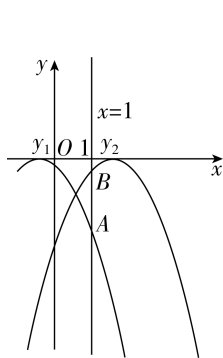
2. **C** 【解析】如图(1), 若  $1 < m < n$ , 则  $a_1 > a_2$ , 故 A 选项错误; 如图(2)和图(3), 若  $m < 1 < n$ , 则  $a_1 > a_2$  或  $a_1 < a_2$ , 故 B 选项错误; 如图(4), 若  $m < n < 1$ , 则  $a_1 < a_2$ , 故 C 选项正确, D 选项错误. 故选 C.



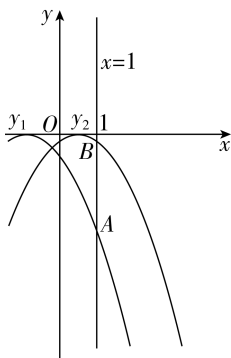
图(1)



图(2)

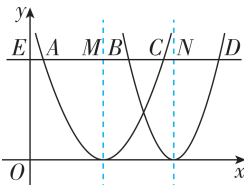


图(3)



图(4)

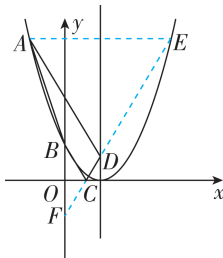
- 3. 6 【解析】**如图,分别作出两抛物线的对称轴交  $AD$  于  $M, N$ , 令直线  $AD$  交  $y$  轴于  $E$ .  $\because$  平行于  $x$  轴的直线与两条抛物线  $y_1 = a(x-h)^2$  和  $y_2 = b(x-13)^2 (a < b)$  相交于点  $A, B, C, D$ ,  $\therefore$  抛物线  $y_2 = b(x-13)^2$  的对称轴为直线  $x = 13$ , 即  $EN = 13$ .  $\because AB = 8, BC = 3, CD = 6, \therefore CM = \frac{1}{2}(AB+BC) = \frac{11}{2}, BN = \frac{1}{2}(BC+CD) = \frac{9}{2}$ .  $\therefore EM+CM+BN-BC = EN, \therefore EM + \frac{11}{2} + \frac{9}{2} - 3 = 13, \therefore EM = 6, \therefore$  抛物线  $y_1 = a(x-h)^2$  的对称轴为直线  $x = 6$ , 即  $h = 6$ , 故答案为 6.



- 4. 1 或 6 【解析】** $\because y = -(x-h)^2, \therefore$  抛物线的开口向下, 对称轴为直线  $x = h, \therefore$  当  $x < h$  时,  $y$  随  $x$  的增大而增大; 当  $x > h$  时,  $y$  随  $x$  的增大而减小.  $\therefore$  当  $2 \leq x \leq 5$  时, 函数有最大值  $-1$ ,  $\therefore$  ①若  $h > 5$ , 则当  $x = 5$  时, 函数有最大值, 为  $-(5-h)^2 = -1$ , 解得  $h = 4$  (舍去) 或  $h = 6$ ; ②若  $h < 2$ , 则当  $x = 2$  时, 函数有最大值, 为  $-(2-h)^2 = -1$ , 解得  $h = 3$  (舍去) 或  $h = 1$ ; ③若  $2 \leq h \leq 5$ , 则当  $x = h$  时, 函数有最大值, 为  $-(h-h)^2 = 0$ , 不符合题意. 故答案为 1 或 6.
- 5.  $2 \leq a \leq 10$  【解析】**抛物线  $y = (x-a)^2$  的对称轴为直线  $x = a$ , 顶点坐标为  $(a, 0)$ . 当对称轴在点  $P$  左侧时,  $a < 3$ , 把  $P(3, 1)$  代入  $y = (x-a)^2$  得  $1 = (3-a)^2$ , 解得  $a = 2$  或  $a = 4$  (舍去); 当对称轴在点  $Q$  右侧时,  $a > 9$ , 把  $Q(9, 1)$  代入  $y = (x-a)^2$  得  $1 = (9-a)^2$ , 解得  $a = 10$  或  $a = 8$  (舍去),  $\therefore$  当  $2 \leq a \leq 10$  时, 抛物线  $y = (x-a)^2$  与线段  $PQ$  有交点. 故答案为  $2 \leq a \leq 10$ .

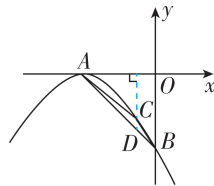
- 6.  $(1, \frac{2}{3})$  【解析】**如图, 作点  $A$  关于抛物线的对称轴直线  $x = 1$  的对称点  $E$ , 则  $E(3, 4)$ , 作点  $B$  关于  $x$  轴的对称点  $F$ , 连结  $EF$  交  $x$  轴于点  $C$ , 交直线  $x = 1$  于点  $D$ , 此时四边形  $ABCD$

的周长取得最小值. 将点  $A(-1, 4)$  代入  $y = a(x-1)^2$  得  $4a = 4$ , 解得  $a = 1$ ,  $\therefore$  抛物线表达式为  $y = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1, \therefore$  点  $B$  的坐标为  $(0, 1), \therefore$  点  $F(0, -1)$ . 设  $CD$  所在直线的表达式为  $y = mx + n (m \neq 0)$ . 将  $E(3, 4), F(0, -1)$  代入得  $\begin{cases} 3m+n=4, \\ n=-1, \end{cases}$  解得  $\begin{cases} m=\frac{5}{3}, \\ n=-1, \end{cases}$   $\therefore CD$  所在直线的表达式为  $y = \frac{5}{3}x - 1$ . 当  $x = 1$



时,  $y = \frac{2}{3}, \therefore D(1, \frac{2}{3})$ . 故答案为  $(1, \frac{2}{3})$ .

- 7. 【解】**(1) 由题易得  $A(-1, 0), B(0, a), a < 0, \therefore OA = 1, OB = -a. \therefore S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}, \therefore \frac{1}{2} \times 1 \times (-a) = \frac{1}{2}$ , 解得  $a = -1, \therefore$  抛物线的表达式为  $y = -(x+1)^2$ . (2)  $\because A(-1, 0), B(0, -1), \therefore$  易得  $AB$  所在直线的表达式为  $y = -x - 1$ . 如图, 过  $C$  作  $x$  轴的垂线, 交  $AB$  于点  $D$ . 设  $C(x, -(x+1)^2) (-1 < x < 0)$ , 则  $D(x, -x - 1), \therefore CD = -(x+1)^2 + x + 1 = -x^2 - x. \therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}(-x^2 - x) \times 1 = -\frac{1}{2}(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{8}. \therefore -\frac{1}{2} < 0, \therefore$  当  $x = -\frac{1}{2}$  时,  $S_{\triangle ABC}$  最大, 此时点  $C$  的坐标为  $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$ .



- 8. 【解】**(1) 令  $y = 0$ , 则  $(x+4)^2 = 0$ , 解得  $x_1 = x_2 = -4$ , 所以点  $A(-4, 0)$ . 令  $x = 0$ , 则  $y = (0+4)^2 = 16$ , 所以点  $B(0, 16)$ . (2) 存在. 由抛物线的表达式可得抛物线的对称轴为直线  $x = -4$ . 因为点  $P$  在抛物线的对称轴上, 所以  $AP \parallel OB$ . 因为以  $P, A, O, B$  为顶点的四边形为平行四边形, 所以  $AP = OB$ , 所以当点  $P$  在点  $A$  上方时,  $P(-4, 16)$ , 当点  $P$  在点  $A$  下方时,  $P(-4, -16)$ . 综上所述, 当点  $P$  的坐标为  $(-4, 16)$  或  $(-4, -16)$  时, 以  $P, A, O, B$  为顶点的四边形为平行四边形.

### 课时 3 二次函数 $y = a(x-h)^2 + k$ 的图象与性质

#### 刷基础

- 1. D 【解析】**由题图可知, 抛物线的顶点  $(h, -k)$  在第一象限,  $\therefore A(h, k)$  在第四象限, 故选 D. **2. D 【解析】** $y = (x-1)^2 + 5$  中,  $\because 1 > 0, \therefore$  函数图象开口向上, 故 A 选项错误; 函数图象的顶点

**关键点拨**  
分  $h > 5, h < 2, 2 \leq h \leq 5$  三种情况进行讨论.

**思路分析**  
因为  $AB$  的长是定值, 所以要使四边形  $ABCD$  的周长最小, 只需  $CB + CD + DA$  的值最小, 因此作点  $A$  关于抛物线的对称轴直线  $x = 1$  的对称点  $E$ , 作点  $B$  关于  $x$  轴的对称点  $F$ , 连结  $EF$ , 交  $x$  轴于点  $C$ , 交直线  $x = 1$  于点  $D$ , 此时四边形  $ABCD$  的周长取得最小值, 据此求解即可.

坐标是(1,5),故B选项错误;函数图象开口向上,∴该函数有最小值,为5,故C选项错误;∴函数图象开口向上,对称轴为直线 $x=1$ ,∴当 $x<1$ 时, $y$ 随 $x$ 的增大而减小;当 $x>1$ 时, $y$ 随 $x$ 的增大而增大,故D选项正确.故选D.

3. **D** 【解析】∵抛物线 $y=4(x-2)^2+m$ 的对称轴为直线 $x=2$ ,抛物线开口向上,∴当 $x<2$ 时, $y$ 随 $x$ 的增大而减小.∴ $A(3,a)$ 关于直线 $x=2$ 的对称点的坐标为 $(1,a)$ ,∴ $a<b$ .

4. **(2,-1)** 【解析】∵抛物线 $y=(x-m)^2+m-3$ 的对称轴是直线 $x=2$ ,∴ $m=2$ ,∴抛物线表达式为 $y=(x-2)^2-1$ ,∴顶点坐标为 $(2,-1)$ .故答案为 $(2,-1)$ .

5. **-1** 【解析】二次函数 $y=a(x-4)^2+4$ 的图象的对称轴为直线 $x=4$ .∴当 $2<x<3$ 时,函数图象位于 $x$ 轴的上方,∴当 $5<x<6$ 时,函数图象位于 $x$ 轴的上方.∴当 $6<x<7$ 时,函数图象位于 $x$ 轴的下方,∴当 $x=6$ 时, $y=0$ ,∴ $4a+4=0$ ,∴ $a=-1$ .

6.  $y=-\frac{1}{2}(x-3)^2+5$  【解析】∵两条抛物线关于 $y$ 轴对称,∴这两条抛物线的开口方向和大小相同.∴抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x+3)^2+5$ 的顶点坐标是 $(-3,5)$ ,∴另一条抛物线的顶点坐标为 $(3,5)$ ,∴另一条抛物线的表达式是 $y=-\frac{1}{2}(x-3)^2+5$ .故答案为 $y=-\frac{1}{2}(x-3)^2+5$ .

7. 【解】(1)∵抛物线 $y=-(x-h)^2+k$ 的对称轴为直线 $x=2$ ,∴ $h=2$ ,∴ $y=-(x-2)^2+k$ .又∵该抛物线过点 $(0,5)$ ,∴ $5=-(0-2)^2+k$ ,解得 $k=9$ ,∴该抛物线的表达式为 $y=-(x-2)^2+9$ .

(2)令 $y=-7$ ,则 $-7=-(x-2)^2+9$ ,解得 $x_1=-2$ , $x_2=6$ .∴当 $0\leq x\leq a$ 时,该二次函数值 $y$ 取得的最小值为 $-7$ ,∴ $a=6$ .

8. **C** 【解析】由“左加右减”的原则可知,将二次函数 $y=2x^2$ 的图象向右平移2个单位所得函数图象的表达式为 $y=2(x-2)^2$ .由“上加下减”的原则可知,将二次函数 $y=2(x-2)^2$ 的图象向下平移3个单位所得函数图象的表达式为 $y=2(x-2)^2-3$ .故选C.

9. **B** 【解析】抛物线 $y=3x^2$ 的顶点坐标为 $(0,0)$ .∴把抛物线 $y=3x^2$ 向左平移2个单位,再向上平移1个单位,∴平移后的抛物线的顶点坐标为 $(-2,1)$ .∴再绕原点旋转 $180^\circ$ ,∴旋转后的抛物线的顶点坐标为 $(2,-1)$ ,∴所得抛物线的表达式为 $y=-3(x-2)^2-1$ .故选B.

10. **C** 【解析】∵点 $P(m,5)$ 在抛物线 $C:y=-(x-3)^2+6$ 上,∴ $-(m-3)^2+6=5$ ,解得

### 思路分析

先求出 $P(4,5)$ 或 $(2,5)$ ,再根据平移方式得出对应点 $P'$ 的坐标为 $(1,1)$ 或 $(-1,1)$ ,最后根据两点间的距离公式即可得出答案.

### 思路分析

先根据抛物线的表达式得出对称轴为直线 $x=4$ ,由二次函数图象的对称性可知当 $5<x<6$ 时,函数图象位于 $x$ 轴的上方,结合题意可知当 $x=6$ 时, $y=0$ ,从而求得 $a$ 的值.

### 注意

分 $n<1$ , $1\leq n\leq 4$ 和 $n>4$ 三种情况讨论.

### 思路分析

当抛物线顶点为 $A(1,4)$ 时, $C$ 点横坐标最小,根据此时抛物线的对称轴,可求出 $C,D$ 间的距离.当抛物线顶点为 $B(4,4)$ 时, $D$ 点横坐标最大,进而可求出点 $D$ 横坐标的最大值.

$m=4$ 或 $m=2$ ,∴ $P(4,5)$ 或 $(2,5)$ .∴将抛物线 $C$ 进行平移得抛物线 $C':y=-x^2+2$ ,∴平移方式为向左平移3个单位,再向下平移4个单位,∴ $P$ 的对应点 $P'$ 的坐标为 $(1,1)$ 或 $(-1,1)$ .∴ $\sqrt{(4-1)^2+(5-1)^2}=5$ , $\sqrt{[2-(-1)]^2+(5-1)^2}=5$ ,∴点 $P'$ 移动的最短路程为5,故选C.

11. **2或4** 【解析】抛物线 $y=(x+3)^2$ 向下平移1个单位长度的表达式为 $y=(x+3)^2-1$ .设抛物线向右平移 $h$ 个单位长度后,得到的新抛物线经过原点,则新抛物线的表达式为 $y=(x+3-h)^2-1$ .∴新抛物线经过原点,∴当 $x=0$ 时, $y=0$ ,∴ $(3-h)^2-1=0$ ,解得 $h=2$ 或4.故答案为2或4.

### 刷提升

1. **A** 【解析】由题意可知二次函数 $y=-4(x-n)^2-3n$ 图象的顶点坐标为 $(n,-3n)$ ,∴无论 $n$ 为何值,其图象的顶点都在直线 $y=-3x$ 上,故选A.

2. **A** 【解析】∵ $y=-(x-n)^2-1$ , $-1<0$ ,∴抛物线的对称轴为直线 $x=n$ ,抛物线开口向下,∴抛物线上的点离对称轴越远,函数值越小.当 $n<1$ 时,则 $x=1$ 时,函数值最大,故 $-(1-n)^2-1=-10$ ,解得 $n_1=-2$ , $n_2=4$ (舍去);当 $1\leq n\leq 4$ 时, $y=-(x-n)^2-1$ 的最大值为 $-1$ ,不符合题意;当 $n>4$ 时,则 $x=4$ 时,函数值最大,故 $-(4-n)^2-1=-10$ ,解得 $n_3=1$ (舍去), $n_4=7$ .综上所述, $n$ 的值为 $-2$ 或 $7$ .故选A.

3. **B** 【解析】∵抛物线 $y=a(x-2)^2+c(a>0)$ 的顶点为 $E$ ,四边形 $OABC$ 是正方形且抛物线经过点 $A,B$ ,∴抛物线的对称轴是直线 $x=2$ ,且 $A,B$ 关于直线 $x=2$ 对称,∴ $AB=4$ .过 $E$ 作 $EF\perp x$ 轴于 $F$ ,交 $AB$ 于 $D$ .∴ $\triangle ABE$ 为等腰直角三角形,∴ $DE=\frac{1}{2}AB=2$ .∴四边形 $OABC$ 是正方形,∴ $OA=AB=BC=OC=4$ , $EF=4+2=6$ ,∴ $A(0,-4)$ , $E(2,-6)$ .把 $A,E$ 的坐标代入

$$y=a(x-2)^2+c \text{ 得 } \begin{cases} 4a+c=-4, \\ c=-6, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a=\frac{1}{2}, \\ c=-6. \end{cases} \text{ 故}$$

选B.

4. **D** 【解析】根据题意,当抛物线顶点为 $A(1,4)$ 时, $C$ 点横坐标最小,为 $-3$ ,则抛物线的对称轴为直线 $x=1$ ,此时点 $D$ 的坐标为 $(5,0)$ ,∴ $CD=5-(-3)=8$ .当抛物线顶点为 $B(4,4)$ 时, $D$ 点横坐标最大,此时抛物线的对称轴为直线 $x=4$ .又∵ $CD=8$ ,∴ $C(0,0)$ , $D(8,0)$ ,∴点 $D$ 横坐标的最大值为8,故选D.

5. **①②④** 【解析】①∵ $(x-2)^2\geq 0$ ,∴ $-(x-$

$2)^2 \leq 0$ ,  $\therefore y_2 = -(x-2)^2 - 1 \leq -1 < 0$ ,  $\therefore$  无论  $x$  取何值,  $y_2$  总是负数, 故①正确. ② $\because$  抛物线  $l_1: y_1 = -(x+1)^2 + 2$  的顶点为  $(-1, 2)$ , 抛物线  $l_2: y_2 = -(x-2)^2 - 1$  的顶点为  $(2, -1)$ ,  $\therefore l_2$  可由  $l_1$  向右平移 3 个单位, 再向下平移 3 个单位得到, 故②正确. ③ $\because y_1 - y_2 = -(x+1)^2 + 2 - [-(x-2)^2 - 1] = -6x + 6$ ,  $\therefore$  随着  $x$  的增大,  $y_1 - y_2$  的值逐渐减小, 故③错误. ④设  $AC$  与  $DE$  交于点  $F$ .  $\because$  当  $y = -2$  时,  $-(x+1)^2 + 2 = -2$ , 解得  $x = -3$  或  $x = 1$ ,  $\therefore$  点  $A(-3, -2)$ . 当  $y = -2$  时,  $-(x-2)^2 - 1 = -2$ , 解得  $x = 3$  或  $x = 1$ ,  $\therefore$  点  $C(3, -2)$ ,  $\therefore AF = CF = 3, AC = 6$ . 当  $x = 0$  时,  $y_1 = 1, y_2 = -5$ ,  $\therefore DE = 6 = AC, DF = EF = 3$ ,  $\therefore$  四边形  $AECD$  为矩形. 又 $\because AC \perp DE$ ,  $\therefore$  四边形  $AECD$  为正方形, 故④正确. 故答案为①②④.

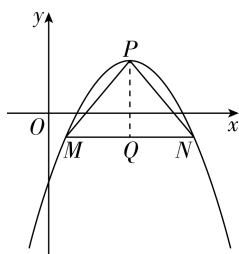
6. 【解】(1) $\because$  抛物线  $L_1: y = a(x+1)^2 - 4 (a \neq 0)$  经过点  $A(1, 0)$ ,  $\therefore 4a - 4 = 0$ ,  $\therefore a = 1$ ,  $\therefore$  抛物线  $L_1$  的函数表达式为  $y = x^2 + 2x - 3$ .

(2) $\because$  抛物线  $L_1: y = (x+1)^2 - 4$ ,  $\therefore$  抛物线的顶点为  $(-1, -4)$ .  $\because$  将抛物线  $L_1$  向上平移  $m (m > 0)$  个单位得到抛物线  $L_2$ ,  $\therefore$  抛物线  $L_2$  的顶点为  $(-1, -4+m)$ , 而  $(-1, -4+m)$  关于原点的对称点为  $(1, 4-m)$ , 把  $(1, 4-m)$  代入  $y = x^2 + 2x - 3$ , 得  $1 + 2 - 3 = 4 - m$ ,  $\therefore m = 4$ .

(3) $\because$  抛物线  $L_1$  向右平移  $n (n > 0)$  个单位得到抛物线  $L_3$ ,  $\therefore$  抛物线  $L_3$  的表达式为  $y = (x - n + 1)^2 - 4$ .  $\because$  点  $B(1, y_1), C(3, y_2)$  在抛物线  $L_3$  上,  $\therefore y_1 = (2 - n)^2 - 4, y_2 = (4 - n)^2 - 4$ .  $\because y_1 > y_2$ ,  $\therefore (2 - n)^2 - 4 > (4 - n)^2 - 4$ , 解得  $n > 3$ ,  $\therefore n$  的取值范围为  $n > 3$ .

#### 刷素养

7. 【解】(1) $\because$  二次函数  $y = a(x-3)^2 + 2 (a < 0)$  的图象经过点  $(1, 0)$ ,  $\therefore 4a + 2 = 0$ ,  $\therefore a = -\frac{1}{2}$ ,  $\therefore$  二次函数的表达式为  $y = -\frac{1}{2}(x-3)^2 + 2$ ,  $\therefore$  该抛物线的顶点坐标为  $P(3, 2)$ .



图(1)

$\because y_1 = y_2$ ,  $\therefore M, N$  关于抛物线的对称轴对称.  $\because$  抛物线的对称轴是直线  $x = 3, x_2 - x_1 = 5$ ,  $\therefore \frac{x_1 + x_2}{2} = 3$ , 即  $x_1 + x_2 = 6$ ,  $\therefore \begin{cases} x_1 + x_2 = 6, \\ x_2 - x_1 = 5, \end{cases}$  解得

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}, \\ x_2 = \frac{11}{2}, \end{cases} \therefore M\left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{8}\right), N\left(\frac{11}{2}, -\frac{9}{8}\right). \text{ 如图}$$

(1), 过点  $P$  作  $PQ \perp MN$  于  $Q$ , 则  $PQ = 2 - \left(-\frac{9}{8}\right) = \frac{25}{8}$ ,  $\therefore S_{\triangle PMN} = \frac{1}{2}MN \cdot PQ = \frac{1}{2} \times 5 \times$

#### 思路分析

(1) 把点  $(1, 0)$  代入表达式  $y = a(x-3)^2 + 2 (a < 0)$  中求得  $a$  的值, 得到抛物线表达式即可确定顶点  $P$  的坐标. 由  $y_1 = y_2$  得到点  $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$  关于对称轴对称, 可得  $\frac{x_1 + x_2}{2} = 3$ , 结合  $x_2 - x_1 = 5$ , 求出点  $M, N$  的坐标, 进而求解即可.

(2) 根据二次函数  $y = a(x-3)^2 + 2 (a < 0)$  得到其图象的顶点  $P(3, 2)$ , 可得函数的最大值为 2, 再分  $y_1 \leq y_2$  和  $y_2 < y_1$  两种情况讨论求解即可.

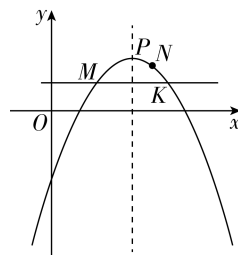
$$\frac{25}{8} = \frac{125}{16}.$$

(2) $\because$  二次函数  $y = a(x-3)^2 + 2 (a < 0)$ ,  $\therefore$  其图象的顶点为  $P(3, 2)$ ,  $\therefore$  函数的最大值为 2.

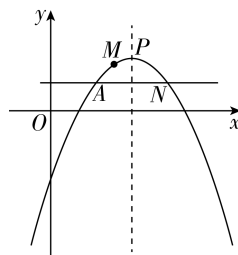
①当  $y_1 \leq y_2$  时, 如图(2).  $\because$  函数最大值与最小值的差为 1,  $\therefore y_1 = 1$ . 设  $M(x_1, y_1)$  关于对称轴的对称点为  $K(x_0, y_1)$ .  $\because$  二次函数  $y = a(x-3)^2 + 2 (a < 0)$  图象的对称轴为直线  $x = 3$ ,  $\therefore \frac{x_1 + x_0}{2} = 3$ ,  $\therefore x_0 = 6 - x_1$ ,  $\therefore K(6 - x_1, y_1)$ . 根据

$$\begin{cases} x_1 < 3, \\ 5 + x_1 > 3, \end{cases} \text{ 解得 } -2 < x_1 \leq \frac{1}{2}, \therefore -5 < x_1 - 3 \leq -\frac{5}{2}, \therefore \frac{25}{4} \leq (x_1 - 3)^2 < 25. \because y_1 = 1,$$

$$\therefore y_1 = a(x_1 - 3)^2 + 2 = 1, \text{ 解得 } (x_1 - 3)^2 = -\frac{1}{a}, \therefore \frac{25}{4} \leq -\frac{1}{a} < 25, \text{ 解得 } -\frac{4}{25} \leq a < -\frac{1}{25}.$$



图(2)



图(3)

②当  $y_2 < y_1$  时, 如图(3).  $\because$  函数最大值与最小值的差为 1,  $\therefore y_2 = 1$ . 设  $N(x_2, y_2)$  关于对称轴的对称点为  $A(x_3, y_2)$ .  $\because$  二次函数  $y = a(x-3)^2 + 2 (a < 0)$  图象的对称轴为直线  $x = 3$ ,  $\therefore \frac{x_2 + x_3}{2} = 3$ ,  $\therefore x_3 = 6 - x_2$ ,  $\therefore A(6 - x_2, y_2)$ . 根据

$$\begin{cases} x_2 > 3, \\ x_2 - 5 < 3, \end{cases} \text{ 解得 } \frac{11}{2} < x_2 < 8, \therefore \frac{5}{2} < x_2 - 3 < 5,$$

$$\therefore \frac{25}{4} < (x_2 - 3)^2 < 25. \because y_2 = 1, \therefore y_2 = a(x_2 - 3)^2 + 2 = 1, \text{ 解得 } (x_2 - 3)^2 = -\frac{1}{a}, \therefore \frac{25}{4} < -\frac{1}{a} < 25, \text{ 解得 } -\frac{4}{25} < a < -\frac{1}{25}.$$

综上,  $a$  的取值范围为  $-\frac{4}{25} \leq a < -\frac{1}{25}$ .

#### 课时4 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与性质



#### 刷基础

1. C 【解析】 $y = 2x^2 + 8x + 4 = 2(x^2 + 4x + 2) = 2(x^2 + 4x + 4) - 4 = 2(x+2)^2 - 4$ , 可得抛物线的顶点坐标为  $(-2, -4)$ . 根据题中过程可知从



甲开始出错,按照此步骤进行下去到丁处时可得顶点应为 $(-2, -2)$ ,所以错误的是甲和丁. 故选 C.

2. 4 【解析】 $y = -\frac{1}{4}x^2 - x + 3 = -\frac{1}{4}(x^2 + 4x) + 3 = -\frac{1}{4}(x^2 + 4x + 4 - 4) + 3 = -\frac{1}{4}(x+2)^2 + 4$ ,  $\therefore k=4$ ,故答案为 4.

3. C 【解析】 $\because y = 2x^2 + 8x + 7 = 2(x+2)^2 - 1$ ,  $\therefore$  抛物线开口向上,对称轴为直线  $x = -2$ ,顶点坐标为 $(-2, -1)$ ,与  $y$  轴交于正半轴,  $\therefore$  C 选项符合,故选 C.

4. D 【解析】由题意可得  $6 = m^2 - m$ ,解得  $m_1 = 3, m_2 = -2$ .  $\because$  二次函数  $y = x^2 + mx + m^2 - m$  的图象的对称轴在  $y$  轴左侧,  $\therefore m > 0$ ,  $\therefore m = 3$ ,  $\therefore y = x^2 + 3x + 6$ .  $\because 1 > 0$ ,  $\therefore$  该二次函数有最小值,最小值为  $\frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \times 1 \times 6 - 3^2}{4 \times 1} = \frac{15}{4}$ . 故选 D.

5.  $y_2 < y_1 < y_3$  【解析】 $\because y = ax^2 - 2ax + 3a (a \neq 0)$ ,  $\therefore$  图象的对称轴是直线  $x = -\frac{-2a}{2a} = 1$ .  $\therefore$  当  $x > 2$  时,  $y$  随着  $x$  的增大而增大,  $\therefore a > 0$ .  $\therefore$  点  $(-1, y_1)$  关于直线  $x = 1$  的对称点是  $(3, y_1)$ , 且  $2 < 3 < 4$ ,  $\therefore y_2 < y_1 < y_3$ . 故答案为  $y_2 < y_1 < y_3$ .

6. A 【解析】 $y = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$ ,  $\therefore$  将抛物线  $y = x^2 + 2x$  向下平移 2 个单位长度后,所得新抛物线的顶点式为  $y = (x+1)^2 - 3$ ,故选 A.

7. 3 【解析】根据题意知,原二次函数图象的顶点坐标是 $(0+1, 4-2)$ ,即 $(1, 2)$ ,则原二次函数的表达式为  $y = -(x-1)^2 + 2 = -x^2 + 2x + 1$ ,故  $m=2, n=1$ ,所以  $m+n=2+1=3$ .

8. C 【解析】 $\because$  抛物线的顶点坐标为 $(-1, -2)$ ,  $\therefore$  可设抛物线表达式为  $y = a(x+1)^2 - 2$ ,  $\therefore y = a(x^2 + 2x + 1) - 2 = ax^2 + 2ax + a - 2$ . 又  $\because$  抛物线为  $y = ax^2 + bx + c$ ,  $\therefore b = 2a, c = a - 2$ .  $\because$  抛物线与  $y$  轴的交点在  $x$  轴上方,  $\therefore c = a - 2 > 0$ ,  $\therefore a > 2$ ,故选项 A、B 错误. 又抛物线的顶点坐标为 $(-1, -2)$ ,  $\therefore$  当  $x = -1$  时,  $y = a - b + c = -2$ ,故选项 C 正确.  $\because b = 2a, c = a - 2$ ,  $\therefore b^2 - 4ac = 4a^2 - 4a(a - 2) = 8a > 0$ ,故选项 D 错误. 故选 C.

9. ④ 【解析】由函数图象可知,  $a < 0, b < 0, c > 0$ ,  $\therefore abc > 0$ ,故①错误. 因为抛物线经过点 $(-3, 0)$ 和 $(1, 0)$ ,所以抛物线的对称轴为直线  $x = -1$ ,则  $-\frac{b}{2a} = -1$ ,所以  $b = 2a$ ,所以  $2a - b = 0$ ,故②错误. 将 $(1, 0)$ 代入  $y = ax^2 + bx + c$ ,得  $a + b + c = 0$ . 将  $b = 2a$  代入  $a + b + c = 0$ ,得  $a + 2a + c = 0$ ,所以  $3a + c = 0$ ,故③错误. 因为抛物线的对称轴为直线  $x = -1$ ,开口向下,所以当  $x = -1$

### 易错警示

本题容易因忽略函数有最小值时,  $m > 0$  这一隐含条件致错.

### 关键点拨

根据抛物线表达式求出它的顶点坐标. 过点 C 作  $CA \perp y$  轴于点 A. 根据抛物线的对称性可知阴影部分的面积等于矩形 ACBO 的面积,然后求解即可.

### 关键点拨

根据二次函数的图象确定  $a, b, c$  的关系的几个主要关键点: ① 抛物线的开口方向; ② 抛物线的对称轴; ③ 抛物线与  $x$  轴、 $y$  轴的交点; ④ 抛物线的最值.

时,函数取得最大值,为  $a - b + c$ ,所以对于抛物线上的任意一点(横坐标为  $m$ ),总有  $am^2 + bm + c \leq a - b + c$ ,即  $am^2 + bm \leq a - b$ ,故④正确. 故答案为④.

### 刷易错

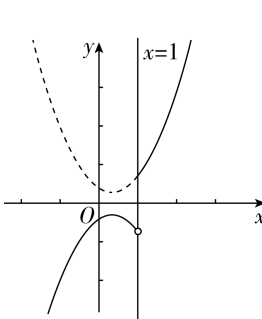
10. 4 【解析】 $\because$  抛物线  $y = mx^2 + 4x + m - 1$  的对称轴为直线  $x = -\frac{2}{m}$ ,  $\therefore$  当  $x = -\frac{2}{m}$  时,  $y$  有最小值,  $\therefore m \cdot \left(-\frac{2}{m}\right)^2 - 4 \times \frac{2}{m} + m - 1 = 2$ ,整理可得  $m^2 - 3m - 4 = 0$ ,解得  $m = -1$  或  $m = 4$ ,经检验,均是原方程的解. 又  $\because$  函数有最小值,  $\therefore m > 0$ ,  $\therefore m = 4$ . 故答案为 4.

### 刷提升

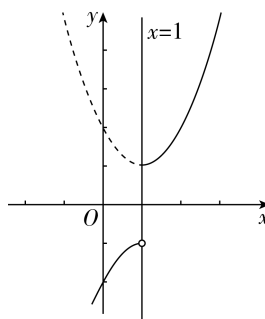
1. C 【解析】 $\because$  抛物线开口向上,  $\therefore a > 0$ .  $\because$  抛物线对称轴在  $y$  轴左侧,  $\therefore -\frac{b}{2a} < 0$ ,  $\therefore b > 0$ .  $\therefore$  抛物线与  $y$  轴的交点在  $x$  轴下方,  $\therefore c < 0$ ,  $\therefore$  直线  $y = ax + b$  经过第一、二、三象限,反比例函数  $y = -\frac{c}{x}$  的图象在第一、三象限,故选 C.

2. B 【解析】如图,过点 C 作  $CA \perp y$  轴于点 A.  $\because$  抛物线  $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 2$ ,  $\therefore$  顶点坐标为  $C(2, -2)$ ,  $\therefore$  易得其对称轴与两段抛物线所围成的阴影部分的面积为  $2 \times 2 = 4$ ,故选 B.

3. D 【解析】 $y = x^2 - 2tx + t^2 + t = (x-t)^2 + t$ ,  $\therefore$  对称轴为直线  $x = t$ ,顶点坐标为  $(t, t)$ . ①当  $0 < t < 1$  时,如图(1),此时  $y$  的取值范围为  $y \geq (1-t)^2 + t$  或  $y \leq -t$ ,不满足题意.



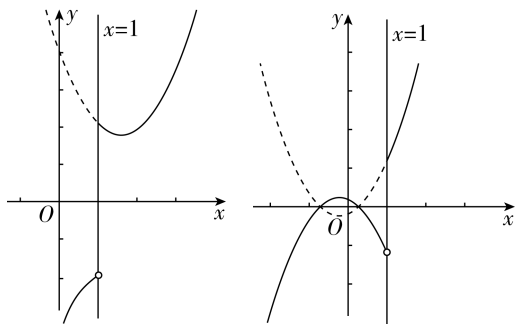
图(1)



图(2)

②当  $t = 1$  时,如图(2),此时  $y$  的取值范围为  $y \geq 1$  或  $y < -1$ ,满足题意,此时  $m = 1, n = -1$ ,  $\therefore s = 1 - (-1) = 2$ .

③当  $t > 1$  时,如图(3),此时  $y$  的取值范围为  $y \geq t$  或  $y < -(1-t)^2 - t$ ,满足题意,此时  $m = t, n = -(1-t)^2 - t$ ,  $\therefore s = t - [-(1-t)^2 - t] = (1-t)^2 + 2t = t^2 + 1 > 2$ .



图(3)

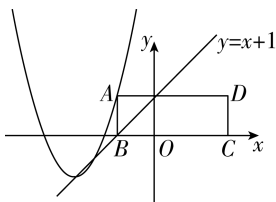
图(4)

④当  $t \leq 0$  时,如图(4),此时  $y$  的取值范围为  $y \geq (1-t)^2 + t$  或  $y \leq -t$ ,不满足题意.

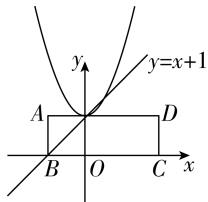
综上,  $s \geq 2$ ,故选 D.

4. ②③④ 【解析】根据题表的数据可得,该二次函数图象的对称轴为直线  $x = \frac{0+6}{2} = 3$ ,  $\therefore$  点  $(2, 1)$  关于对称轴的对称点为  $(4, 1)$ .  $\therefore$  点  $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$  在该函数图象上,当  $2 < x_1 < x_2$  时,  $y_1 < y_2 < 1$ ,  $\therefore$  点  $P(x_1, y_1)$  离对称轴较远,点  $Q(x_2, y_2)$  离对称轴近,  $\therefore$  抛物线开口向上,即  $a > 0$ ,  $\therefore 3 < x_1 < x_2 < 4$  或  $2 < x_1 < 3 < x_2 < 4$  且  $x_1 + x_2 > 6$ ,故②正确.  $\therefore$  当  $x > 3$  时,  $y$  随着  $x$  的增大而增大,且  $x = 4$  时,  $y = 1$ ,  $\therefore n > 1$ . 当  $x = 5$  时,  $y = 25a + 5b + c > 1$ ,  $\therefore 25a + 5b + c - 1 > 0$ ,故①错误,③正确.  $\therefore$  当  $x = 3$  时,二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  的图象取得最低点,  $\therefore$  当  $x_1 \geq 3$  时,存在直线  $y = k$  与图形  $G$  有一个交点;当  $2 < x_1 < 3$  时,  $3 < x_2 < 4$ ,存在直线  $y = k$  与图形  $G$  有两个交点,  $\therefore 2 < x_1 < 3$ ,故④正确. 综上所述,正确的有②③④,故答案为②③④.

5.  $\frac{-3-\sqrt{5}}{2} \leq m \leq 0$  【解析】将  $y = x^2 - 2mx + m^2 + m + 1$  配成顶点式得  $y = (x-m)^2 + m + 1$ ,此二次函数图象的顶点坐标是  $(m, m+1)$ .  $\therefore a = 1$ ,  $\therefore$  图象开口向上,开口大小一定,  $\therefore$  此二次函数图象的顶点在直线  $y = x + 1$  上运动. 如图(1),当二次函数图象与矩形第一次相交时,二次函数图象经过点  $A(-1, 1)$ ,此时  $m$  取最小值. 将  $A(-1, 1)$  代入  $y = x^2 - 2mx + m^2 + m + 1$  得  $1 + 2m + m^2 + m + 1 = 1$ ,解得  $m_1 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$ ,  $m_2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$  (舍去),则  $m$  的最小值是  $\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$ .



图(1)



图(2)

如图(2),当二次函数图象与矩形最后一次相交时,二次函数图象的顶点在矩形与  $y$  轴的

### 思路分析

先将二次函数的表达式配成顶点式,则可得其图象的顶点在直线  $y = x + 1$  上运动. 当二次函数图象与矩形第一次相交时,二次函数的图象经过点  $A(-1, 1)$ ,此时  $m$  取最小值,当二次函数图象与矩形最后一次相交时,二次函数图象的顶点在矩形与  $y$  轴的交点  $(0, 1)$  处,此时  $m$  取最大值,据此求解即可.

交点  $(0, 1)$  处,此时  $m$  取最大值,即  $0$ ,  $\therefore \frac{-3-\sqrt{5}}{2} \leq m \leq 0$ ,故答案为  $\frac{-3-\sqrt{5}}{2} \leq m \leq 0$ .

6. 【解】(1) 当  $x = 0$  时,  $y = ax^2 - 3ax + 6 = 6$ ,  $\therefore A(0, 6)$ .  $\because AB \parallel x$  轴,  $\therefore \angle BAO = 90^\circ$ ,点  $B$  的纵坐标为  $6$ ,  $\therefore 6 = ax^2 - 3ax + 6$ .  $\because a \neq 0$ ,  $\therefore x_1 = 0, x_2 = 3$ ,  $\therefore$  点  $B$  的坐标为  $(3, 6)$ ,  $\therefore AB = 3, OB = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5}$ ,  $\therefore \sin \angle AOB = \frac{AB}{OB} = \frac{3}{3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ .

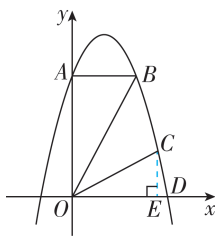
如图,过点  $C$  作  $CE \perp x$  轴,垂足为  $E$ .  $\therefore \angle AOB = \angle COD$ ,  $\therefore CE = OC \cdot \sin \angle COD = OC \cdot \sin \angle AOB$ .

$$\sin \angle AOB = 2\sqrt{5} \times \frac{\sqrt{5}}{5} = 2,$$

$$\therefore OE = \sqrt{OC^2 - CE^2} = \sqrt{20 - 4} = 4,$$

$\therefore C(4, 2)$ . 综上,点  $A, B, C$  的坐标分别为  $(0, 6), (3, 6), (4, 2)$ .

(2)  $\because$  点  $C(4, 2)$  在抛物线  $y = ax^2 - 3ax + 6$  上,  $\therefore 2 = a \cdot 16 - 3a \cdot 4 + 6$ ,  $\therefore a = -1$ ,  $\therefore$  抛物线的表达式为  $y = -x^2 + 3x + 6 = -(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{33}{4}$ ,  $\therefore$  抛物线的顶点坐标为  $(\frac{3}{2}, \frac{33}{4})$ .



### 刷素养

7. 【解】(1)  $\because$  抛物线  $y = -x^2 + bx + c$  与  $y$  轴交于点  $C(0, 3)$ ,  $\therefore$  当  $x = 0$  时,  $y = 3$ ,  $\therefore c = 3$ .  $\because$  抛物线  $y = -x^2 + bx + c$  的对称轴为直线  $x = 1$ ,  $\therefore \frac{-b}{2 \times (-1)} = 1$ ,  $\therefore b = 2$ ,  $\therefore$  抛物线的函数表达式为  $y = -x^2 + 2x + 3$ .

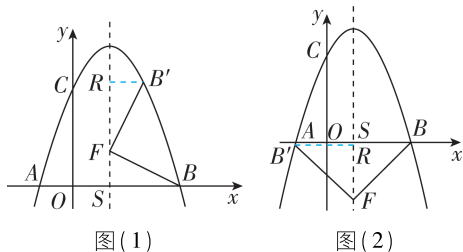
### 思路分析

(2) 先由抛物线的表达式求出点  $A, B$  的坐标,再根据抛物线的对称轴为直线  $x = 1$ ,设  $F(1, t)$ ,对称轴交  $x$  轴于  $S$ ,过  $B'$  作  $B'R \perp$  直线  $x = 1$  于  $R$ ,最后分  $F(1, t)$  在  $x$  轴上方和  $x$  轴下方两种情况求解即可.

(2) 由(1)知抛物线的函数表达式为  $y = -x^2 + 2x + 3$ ,令  $y = 0$ ,得  $-x^2 + 2x + 3 = 0$ ,解得  $x_1 = -1, x_2 = 3$ ,  $\therefore A(-1, 0), B(3, 0)$ .  $\because$  抛物线的对称轴为直线  $x = 1$ ,点  $F$  在抛物线的对称轴上,  $\therefore$  设  $F(1, t)$ ,对称轴交  $x$  轴于点  $S$ ,过  $B'$  作  $B'R \perp$  直线  $x = 1$  于点  $R$ ,如图. 当  $F(1, t)$  在  $x$  轴上方时,如图(1).  $\because$  线段  $FB$  绕点  $F$  逆时针旋转  $90^\circ$  后,点  $B$  的对应点为  $B'$ ,  $\therefore \angle B'FB = 90^\circ, FB = FB'$ ,  $\therefore \angle B'FR + \angle BFS = 90^\circ$ . 又  $\because \angle FBS + \angle BFS = 90^\circ$ ,  $\therefore \angle B'FR = \angle FBS$ . 在  $\triangle B'FR$  和  $\triangle FBS$  中,

$$\begin{cases} \angle B'FR = \angle FBS, \\ \angle B'RF = \angle FSB = 90^\circ, \\ B'F = FB, \end{cases} \therefore \triangle B'FR \cong \triangle FBS$$

(A. A. S.),  $\therefore B'R = FS = t, RF = SB = 3 - 1 = 2$ ,  $\therefore B'(1+t, 2+t)$ . 把  $B'(1+t, 2+t)$  代入  $y = -x^2 + 2x + 3$ ,得  $2+t = -(1+t)^2 + 2(1+t) + 3$ ,解得  $t = 1$  或  $t = -2$  (舍去),  $\therefore F(1, 1)$ .



当  $F(1, t)$  在  $x$  轴下方时, 如图(2), 同理可证  $\triangle B'FR \cong \triangle FBS$  (A. A. S.),  $\therefore B'R = FS = -t$ ,  $RF = SB = 2$ ,  $\therefore B'(1+t, 2+t)$ . 把  $B'(1+t, 2+t)$  代入  $y = -x^2 + 2x + 3$ , 得  $2+t = -(1+t)^2 + 2(1+t) + 3$ , 解得  $t = 1$  (舍去) 或  $t = -2$ ,  $\therefore F(1, -2)$ . 综上所述, 点  $F$  的坐标为  $(1, 1)$  或  $(1, -2)$ .

### 微专题

1. **A** 【解析】 $\because$  点  $(2, a), (-1, b), (3, c)$  都在抛物线  $y = x^2 + x + 2$  上,  $\therefore a = 2^2 + 2 + 2 = 8, b = (-1)^2 - 1 + 2 = 2, c = 3^2 + 3 + 2 = 14, \therefore c > a > b$ . 故选 A.

2. **D** 【解析】二次函数  $y = -x^2 + 4x - c$  的对称轴为直线  $x = 2$ , 则点  $P_3(3, y_3)$  关于直线  $x = 2$  的对称点为  $(1, y_3)$ .  $\because -1 < 0, \therefore$  抛物线  $y = -x^2 + 4x - c$  开口向下,  $\therefore$  当  $x < 2$  时,  $y$  随  $x$  的增大而增大.  $\therefore -3 < 1 = 1, \therefore y_1 < y_3 = y_2$ . 故选 D.

3. **B** 【解析】在  $y = ax^2 - 2ax - 3a (a \neq 0)$  中, 对称轴为直线  $x = -\frac{-2a}{2a} = 1. \therefore -1 < x_1 < 0, 1 < x_2 < 2, x_3 > 3, \therefore |x_3 - 1| > |x_1 - 1| > |x_2 - 1|, \therefore$  点  $(x_3, y_3)$  离对称轴最远, 点  $(x_2, y_2)$  离对称轴最近. 当  $a > 0$  时, 抛物线开口向上,  $\therefore y_3 > y_1 > y_2$ ; 当  $a < 0$  时, 抛物线开口向下,  $\therefore y_3 < y_1 < y_2$ . 综上,  $y_2$  和  $y_3$  可能最大, 也可能最小,  $y_1$  不可能最大, 也不可能最小. 故选 B.

4. 【解】(1)  $\because$  对于  $x_1 = 3, x_2 = 4$  有  $y_1 = y_2, \therefore$  抛物线的对称轴为直线  $x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{7}{2}. \therefore$  抛物线的对称轴为直线  $x = t, \therefore t = \frac{7}{2}$ .

(2)  $\because 2 < x_1 < 3, 3 < x_2 < 4, \therefore \frac{5}{2} < \frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{7}{2}, x_1 < x_2. \text{ 又} \because y_1 < y_2, a > 0, \therefore$  点  $(x_1, y_1)$  离对称轴更近, 则点  $(x_1, y_1)$  与  $(x_2, y_2)$  连线的中点在对称轴的右侧,  $\therefore \frac{x_1 + x_2}{2} > t$ , 即  $t \leq \frac{5}{2}$ .

### 微专题

1. 【解】 $y = x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4$ , 抛物线对称轴为直线  $x = -1$ . 当  $x > -1$  时,  $y$  随  $x$  的增大而增大, 当  $x < -1$  时,  $y$  随  $x$  的增大而减小.  
(1) 在全体实数范围内, 当  $x = -1$  时, 函数有最小值  $-4$ , 没有最大值.  
(2) 在  $-4 \leq x \leq -2$  的范围内, 当  $x = -2$  时, 函数有最小值  $-3$ ; 当  $x = -4$  时, 函数有最大值  $5$ .

### 关键点拨

(1) 依据题意, 可得抛物线对称轴为直线  $x = 1$ , 进而结合二次函数的性质分  $\frac{m}{2} > 1, \frac{m}{2} \leq 1 \leq m+1$  和  $m+1 < 1$  三种情形进行讨论即可得解.

### 思路分析

分  $a > 0$  和  $a < 0$  两种情况讨论, 根据已知三点与对称轴的距离, 结合抛物线开口方向分析即可.

(3) 在  $-3 \leq x \leq 0$  的范围内, 当  $x = -1$  时, 函数有最小值  $-4$ ; 当  $x = -3$  时, 函数有最大值  $0$ .  
(4) 在  $1 \leq x \leq 3$  的范围内, 当  $x = 1$  时, 函数有最小值  $0$ ; 当  $x = 3$  时, 函数有最大值  $12$ .

2. (1)  $1$  或  $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$  (2)  $-2 \leq m \leq -1$

【解析】(1) 抛物线  $y = x^2 - 2x + m - 1$  的对称轴为直线  $x = 1$ , 抛物线开口向上,  $\therefore$  当  $x > 1$  时,  $y$  随  $x$  的增大而增大; 当  $x < 1$  时,  $y$  随  $x$  的增大而减小. ①当  $\frac{m}{2} > 1$ , 即  $m > 2$  时, 则当  $x = \frac{m}{2}$  时,  $y = -1, \therefore \left(\frac{m}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{m}{2} + m - 1 = -1$ , 解得  $m = 0$ , 不符合题意, 舍去. ②当  $\frac{m}{2} \leq 1 \leq m+1$ , 即  $0 \leq m \leq 2$  时, 则当  $x = 1$  时,  $y = -1, \therefore 1 - 2 + m - 1 = -1$ , 解得  $m = 1$ . ③当  $m+1 < 1$ , 即  $m < 0$  时, 则当  $x = m+1$  时,  $y = -1, \therefore (m+1)^2 - 2(m+1) + m - 1 = -1, \therefore m^2 + m - 1 = 0$ , 解得  $m_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, m_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$  (舍去). 综上所述,  $m = 1$  或  $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ . 故答案为  $1$  或  $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ .

(2) 二次函数  $y = ax^2 + 2ax + 1 = a(x+1)^2 - a + 1 (a > 0)$ ,  $\therefore$  该函数图象开口向上, 对称轴是直线  $x = -1$ , 当  $x = -1$  时, 该函数取得最小值  $-a + 1$ .  $\therefore$  当  $m \leq x \leq 0$  时,  $y$  有最小值  $1 - a$  和最大值  $1$ , 且当  $x = 0$  时,  $y = 1$ , 根据抛物线的对称性, 当  $x = -2$  时,  $y = 1, \therefore -2 \leq m \leq -1$ , 故答案为  $-2 \leq m \leq -1$ .

3.  $-1$  或  $-2$  【解析】 $y = x^2 + 2ax = (x+a)^2 - a^2$ ,  $\therefore$  抛物线对称轴为直线  $x = -a$ , 抛物线开口向上. ①若  $-a < 0$ , 即  $a > 0$ , 则当  $x = 0$  时,  $m = 0$ , 当  $x = 3$  时,  $M = 9 + 6a. \therefore M - m = 4, \therefore 9 + 6a - 0 = 4$ , 解得  $a = -\frac{5}{6}$  (舍去). ②若  $0 \leq -a \leq 1.5$ , 即  $-1.5 \leq a \leq 0$ , 则当  $x = -a$  时,  $m = -a^2$ , 当  $x = 3$  时,  $M = 9 + 6a. \therefore M - m = 4, \therefore 9 + 6a + a^2 = 4$ , 解得  $a = -1$  或  $a = -5$  (舍去). ③若  $1.5 < -a \leq 3$ , 即  $-3 \leq a < -1.5$ , 则当  $x = -a$  时,  $m = -a^2$ , 当  $x = 0$  时,  $M = 0. \therefore M - m = 4, \therefore 0 - (-a^2) = 4$ , 解得  $a = -2$  或  $a = 2$  (舍去). ④若  $-a > 3$ , 即  $a < -3$ , 则当  $x = 3$  时,  $m = 9 + 6a$ , 当  $x = 0$  时,  $M = 0. \therefore M - m = 4, \therefore 0 - (9 + 6a) = 4$ , 解得  $a = -\frac{13}{6}$  (舍去). 综上所述,  $a$  的值是  $-1$  或  $-2$ , 故答案为  $-1$  或  $-2$ .

4. 【解】 $y = x^2 + 2mx + 4m^2 = (x+m)^2 + 3m^2, \therefore$  抛物线对称轴是直线  $x = -m$ , 抛物线开口向上.  
①当  $2m > -m$ , 即  $m > 0$  时, 当  $x = 2m$  时,  $y = 9$ ,

$\therefore 4m^2 + 4m^2 + 4m^2 = 9$ , 解得  $m = \frac{\sqrt{3}}{2}$  (负值已舍

去), 此时的二次函数表达式为  $y = x^2 + \sqrt{3}x + 3$ .

②当  $2m \leq -m \leq 2m + 3$ , 即  $-1 \leq m \leq 0$  时, 当  $x = -m$  时,  $y = 9$ ,  $\therefore 3m^2 = 9$ , 解得  $m = \pm\sqrt{3}$  (都不符合题意, 舍去).

③当  $2m + 3 < -m$ , 即  $m < -1$  时, 当  $x = 2m + 3$  时,  $y = 9$ ,  $\therefore (2m + 3)^2 + 2m(2m + 3) + 4m^2 = 9$ , 解得  $m = 0$  (舍去) 或  $m = -1.5$ , 此时的二次函数表达式为  $y = x^2 - 3x + 9$ .

综上, 二次函数表达式为  $y = x^2 + \sqrt{3}x + 3$  或  $y = x^2 - 3x + 9$ .

### 课时5 二次函数最值的应用



#### 刷提升

1. C 【解析】因为  $y = x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1$ , 所以抛物线的对称轴为直线  $x = 1$ , 开口向上, 顶点坐标为  $(1, -1)$ . 因为  $1 - (-1) = 3 - 1$ , 所以  $x = -1$  和  $x = 3$  时的函数值相等. 因为  $-1 \leq x \leq t - 1$ , 当  $x = -1$  时, 函数取得最大值, 当  $x = 1$  时, 函数取得最小值, 所以  $1 \leq t - 1 \leq 3$ , 解得  $2 \leq t \leq 4$ . 故选 C.

2. D 【解析】AB 的长是 10 m 时, BC 的长是 18 m,  $\therefore$  劳动基地 ABCD 的面积是  $10 \times 18 = 180 (\text{m}^2)$ , 故①正确. 设  $AB = x$  m, 则  $BC = (28 - x)$  m. 根据题意得  $x(28 - x) = 192$ , 整理得  $x^2 - 28x + 192 = 0$ , 解得  $x = 12$  或  $x = 16$ ,  $\therefore$  AB 的长有两个不同的值满足劳动基地 ABCD 的面积为  $192 \text{ m}^2$ , 故②正确. 设劳动基地 ABCD 的面积为  $S \text{ m}^2$ ,  $AB = x$  m. 根据题意得  $\begin{cases} x \geq 8, \\ 28 - x \geq 12, \end{cases}$  解得  $8 \leq x \leq 16$ .  $S = x(28 - x) = -x^2 + 28x = -(x - 14)^2 + 196$ .  $\therefore -1 < 0$ ,  $8 \leq x \leq 16$ ,  $\therefore$  当  $x = 14$  时,  $S$  有最大值, 最大值为 196, 当  $x = 8$  时,  $S$  有最小值, 最小值为 160, 故③正确. 故正确的结论有 3 个. 故选 D.

3. 5 【解析】如图, 过点 A 作  $AE \perp BC$  于 E, 则由

题意易知四边形 ADCE

为矩形,  $\therefore \angle DAE =$

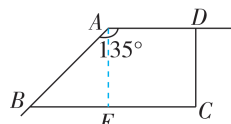
$\angle AEB = 90^\circ$ , 则  $\angle BAE =$

$\angle BAD - \angle EAD = 45^\circ$ . 设  $DC = AE = x$  米, 则

$BC = (15 - x)$  米. 在  $\text{Rt} \triangle AEB$  中,  $\therefore \angle AEB =$

$90^\circ$ ,  $\angle BAE = 45^\circ$ ,  $\therefore \angle B = 45^\circ$ ,  $\therefore AE = BE =$

$x$  米,  $\therefore AD = CE = (15 - 2x)$  米,  $\therefore$  梯形 ABCD 的



#### 注意

不要忽略题目中自变量的取值范围, 尤其注意顶点处的最值是否能取到.

#### 思路分析

过点 A 作  $AE \perp BC$  于 E, 则四边形 ADCE 为矩形, 再证明  $\triangle AEB$  是等腰直角三角形, 设  $AE = DC = x$  米, 则  $AD = CE = (15 - 2x)$  米, 然后根据梯形的面积公式即可求出梯形的面积  $S$  与  $x$  之间的函数关系式, 根据二次函数的性质直接求解即可.

面积  $S = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot CD = \frac{1}{2}(15 - 2x + 15 - x) \cdot$

$x = -\frac{3}{2}x^2 + 15x = -\frac{3}{2}(x - 5)^2 + \frac{75}{2}$ .  $\therefore -\frac{3}{2} < 0$ ,

$\therefore$  抛物线开口向下,  $\therefore$  当  $x = 5$  时,  $S$  有最大值,  $S_{\text{最大}} = \frac{75}{2}$ . 即当  $CD$  的长为 5 米时, 花坛的面积会达到最大, 故答案为 5.

4. 【解】(1) 设每周的销售量  $y$  (个) 与售价  $x$  (元/个) 之间满足的函数关系式为  $y = kx + b$ . 根据题表中的数据可知, 当  $x = 15$  时,  $y = 250$ ; 当  $x = 20$  时,  $y = 200$ .

将这两组数据代入  $y = kx + b$ , 得  $\begin{cases} 15k + b = 250, \\ 20k + b = 200, \end{cases}$

解得  $\begin{cases} k = -10, \\ b = 400. \end{cases}$

所以  $y$  与  $x$  之间的函数关系式为  $y = -10x + 400$ .

(2) 由题意得  $w = (x - 10) \times y = (x - 10)(-10x + 400) = -10x^2 + 400x + 100x - 4\,000 = -10x^2 + 500x - 4\,000$ .

(3) 由(2)得  $w = -10x^2 + 500x - 4\,000$ ,  $w$  是关于  $x$  的二次函数, 图象开口向下, 所以当售价定为  $\frac{500}{-2 \times (-10)} = \frac{500}{20} = 25$  (元/个) 时, 有最大利润, 最大利润为  $-10 \times 625 + 12\,500 - 4\,000 = 2\,250$  (元). 因为物价局规定该模型的售价不超过 30 元/个, 则  $x \leq 30$ , 所以最大利润仍为 2 250 元.

5. 【解】存在.

$\therefore \angle A = \angle ABC = \angle C = 90^\circ$ ,

$\therefore$  四边形 ABCD 是矩形,

$\therefore AB = CD = 40$  米,  $BC = AD = 60$  米.

设  $DP = x$  米, 则  $CP = (40 - x)$  米,  $DQ = (40 - x)$  米,  $\therefore AQ = (20 + x)$  米,

$\therefore S_{\triangle BPQ} = S_{\text{矩形} ABCD} - S_{\triangle ABQ} - S_{\triangle BCP} - S_{\triangle DPQ} = 40 \times 60 - \frac{1}{2} \times 40(20 + x) - \frac{1}{2} \times 60 \times (40 - x) - \frac{1}{2} x(40 - x) = \frac{1}{2} x^2 - 10x + 800 = \frac{1}{2}(x - 10)^2 + 750$ ,

$\therefore$  当  $x = 10$  时,  $S_{\triangle BPQ}$  存在最小值, 最小值为 750,

$\therefore$  按此要求修建的这个健身休闲区 ( $\triangle PBQ$ ) 存在最小面积, 最小面积为 750 平方米, 此时  $DP$  的长为 10 米.



### 3. 求二次函数的表达式

#### 刷基础

1.  $y = 2x^2 + 3x - 4$  【解析】设所求函数的表达式为  $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ . 把  $(-1, -5), (0, -4), (1, 1)$  分别代入, 得

$$\begin{cases} a - b + c = -5, \\ c = -4, \\ a + b + c = 1, \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} a = 2, \\ b = 3, \\ c = -4. \end{cases}$$

故所求二次函数的表达式为  $y = 2x^2 + 3x - 4$ .

2. 【解】设抛物线表达式为  $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ . 由题图可知, 抛物线经过  $A(0, 2), B(4, 0), C(5, -3)$ ,  $\therefore$  把  $A, B, C$  三点坐标分别代入  $y =$

$$ax^2 + bx + c, \text{ 得} \begin{cases} c = 2, \\ 16a + 4b + c = 0, \\ 25a + 5b + c = -3, \end{cases} \therefore \begin{cases} a = -\frac{1}{2}, \\ b = \frac{3}{2}, \\ c = 2, \end{cases} \therefore \text{抛}$$

物线的表达式为  $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$ , 即  $y = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{25}{8}$ ,  $\therefore$  抛物线的顶点坐标为  $\left(\frac{3}{2}, \frac{25}{8}\right)$ .

3.  $y = -\frac{1}{2}(x-3)^2 - 2$  【解析】设抛物线的表达式为  $y = a(x-3)^2 - 2$ . 因为抛物线  $y = a(x-3)^2 - 2$  与抛物线  $y = -\frac{1}{2}x^2$  的形状、开口方向相同, 所以  $a = -\frac{1}{2}$ , 所以所求抛物线的表达式为  $y = -\frac{1}{2}(x-3)^2 - 2$ . 故答案为  $y = -\frac{1}{2}(x-3)^2 - 2$ .

4.  $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{7}{2}$  【解析】从题表看出, 函数图象的对称轴为直线  $x = 1$ , 顶点为  $(1, 4)$ , 函数有最大值 4,  $\therefore$  设  $y = a(x-1)^2 + 4$ . 将  $(-1, 2)$  代入得  $4a + 4 = 2$ , 解得  $a = -\frac{1}{2}$ ,  $\therefore$  二次函数的表达式为  $y = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + 4 = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{7}{2}$ , 故答案为  $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{7}{2}$ .

5.  $y = \frac{1}{4}(x-2)^2 + 2$  【解析】 $\because$  过  $B, C, D$  三点的抛物线的顶点坐标为  $(2, 2)$ ,  $AD \parallel BC \parallel x$  轴,  $\therefore BC = 4$ .  $\because$  四边形  $ABCD$  是平行四边形,  $\therefore AD = BC = 4$ .  $\because A$  的坐标为  $(2, 6)$ ,  $\therefore D(6, 6)$ . 设抛物线的表达式为  $y = a(x-2)^2 + 2$ ,  $D(6, 6)$  代入得  $6 = 16a + 2$ , 解得  $a = \frac{1}{4}$ ,  $\therefore$  抛物

#### 刷有所得

一般地, 当已知抛物线上三点时, 常设其表达式为一般式, 列三元一次方程组来求解; 当已知抛物线的顶点或对称轴时, 常设其表达式为顶点式来求解; 当已知抛物线与  $x$  轴的两个交点时, 常设其表达式为交点式来求解.

#### 易错警示

确定二次函数的表达式的方法是运用待定系数法, 而解题的关键是确定点的坐标, 运用线段的长度确定坐标时注意分类讨论, 避免漏解.

#### 关键点拨

(2) ② 当  $P, B, A$  共线时,  $PA - PB$  的值最大.

线的表达式为  $y = \frac{1}{4}(x-2)^2 + 2$ .

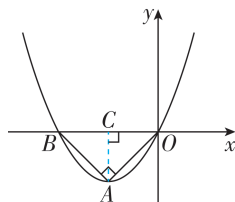
6. 【解】由题意得抛物线的顶点坐标为  $(2, -1)$ ,  $\therefore$  设抛物线的表达式为  $y = a(x-2)^2 - 1 (a \neq 0)$ . 把  $(0, 3)$  代入得  $4a - 1 = 3$ , 解得  $a = 1$ ,  $\therefore$  这个抛物线的表达式为  $y = (x-2)^2 - 1 = x^2 - 4x + 3$ .

7.  $y = -x^2 + 1$  【解析】设抛物线表达式为  $y = a(x+1)(x-1)$ . 把  $(0, 1)$  代入得  $a \times 1 \times (-1) = 1$ , 解得  $a = -1$ , 所以抛物线表达式为  $y = -(x+1)(x-1)$ , 即  $y = -x^2 + 1$ .

8.  $y = -x^2 - 2x + 3$  【解析】由对称轴知, 抛物线与  $x$  轴的另外一个交点是  $(-3, 0)$ , 所以设二次函数表达式为  $y = a(x+3)(x-1)$ . 将  $(0, 3)$  代入得  $3 = a \times 3 \times (-1)$ , 解得  $a = -1$ ,  $\therefore$  二次函数的表达式为  $y = -(x+3)(x-1) = -x^2 - 2x + 3$ . 故答案为  $y = -x^2 - 2x + 3$ .

9. 【解】如图, 作  $AC \perp OB$  于点  $C$ .  $\because OA = AB, \angle BAO = 90^\circ, OB = 2, \therefore OC = BC =$

$AC = \frac{1}{2}OB = 1, \therefore A(-1, -1), B(-2, 0)$ . 设抛物线表达式为  $y = ax(x+2)$ , 点  $A(-1, -1)$  代入, 得  $-1 = a \times (-1) \times (-1+2)$ , 解得  $a = 1$ , 故抛物线的表达式为  $y = x(x+2) = x^2 + 2x$ .



#### 刷易错

10.  $y = -x^2 + x + 2$  或  $y = x^2 - x - 2$  【解析】设抛物线的表达式为  $y = a(x-2)(x+1)$ .  $\because OC = 2, \therefore C$  点坐标为  $(0, 2)$  或  $(0, -2)$ . 把  $C(0, 2)$  代入  $y = a(x-2)(x+1)$  得  $a \cdot (-2) \cdot 1 = 2$ , 解得  $a = -1$ , 此时抛物线表达式为  $y = -(x-2)(x+1)$ , 即  $y = -x^2 + x + 2$ ; 把  $C(0, -2)$  代入  $y = a(x-2)(x+1)$  得  $a \cdot (-2) \cdot 1 = -2$ , 解得  $a = 1$ , 此时抛物线表达式为  $y = (x-2)(x+1)$ , 即  $y = x^2 - x - 2$ . 所以抛物线表达式为  $y = -x^2 + x + 2$  或  $y = x^2 - x - 2$ .

### 大招专题 1 二次函数中的最值问题



#### 刷难关

#### 大招解读 | 几何定理法求线段之差(和)的最值

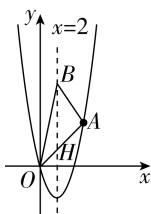
(1) 线段之差最大问题: 当两定点和动点共线时, 线段之差最大, 所以动点在两定点所在的直线上, 求解时可过两定点作直线.

(2) 线段之和(周长)最小问题: 这类问题一般是将军饮马中“两定点, 定线上一动点”, 求解时作对称点, 将求和的两条线段转化到一条线段上.

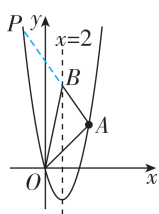
1. 【解】(1)  $\because$  抛物线过点  $O(0, 0), A(5, 5)$ , 且它的对称轴为直线  $x = 2$ ,  $\therefore$  抛物线与  $x$  轴的另一个交点的坐标为  $(4, 0)$ . 设抛物线表达式为  $y = ax(x-4)$ . 把  $A(5, 5)$  代入, 得  $5a = 5$ , 解得  $a = 1$ ,  $\therefore$  此抛物线的表达式为  $y = x^2 - 4x$ .

(2) ① 如图(1),  $\because$  点  $B$  是抛物线对称轴上的

一点,且点  $B$  在第一象限,  $\therefore$  设  $B(2, m) (m > 0)$ , 直线  $OA$  的表达式为  $y = kx$ , 则  $5k = 5$ , 解得  $k = 1$ ,  $\therefore$  直线  $OA$  的表达式为  $y = x$ . 设直线  $OA$  与抛物线对称轴交于点  $H$ , 则  $H(2, 2)$ ,  $\therefore BH = |m - 2|$ .  $\therefore S_{\triangle OAB} = 15$ ,  $\therefore \frac{1}{2} \times |m - 2| \times 5 = 15$ , 解得  $m = 8$  或  $m = -4$  (舍去),  $\therefore$  点  $B$  的坐标为  $(2, 8)$ .



图(1)



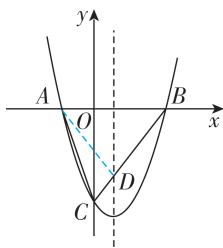
图(2)

②设直线  $AB$  的表达式为  $y = cx + d$ . 把  $A(5, 5)$ ,  $B(2, 8)$  代入得  $\begin{cases} 5c + d = 5, \\ 2c + d = 8, \end{cases}$  解得  $\begin{cases} c = -1, \\ d = 10, \end{cases}$   $\therefore$  直线  $AB$  的表达式为  $y = -x + 10$ . 如图(2), 当  $PA - PB$  的值最大时, 点  $A, B, P$  在同一条直线上.

$\therefore P$  是抛物线上的动点,  $\therefore$  联立  $\begin{cases} y = -x + 10, \\ y = x^2 - 4x, \end{cases}$  解得  $\begin{cases} x_1 = -2, \\ y_1 = 12, \end{cases} \begin{cases} x_2 = 5, \\ y_2 = 5 \end{cases}$  (舍去),  $\therefore P(-2, 12)$ .

2. 【解】(1)  $\because OA = 2, OC = 8, \therefore A(-2, 0), C(0, -8)$ . 将  $A(-2, 0), C(0, -8)$  代入  $y = x^2 + bx + c$ , 得  $\begin{cases} 4 - 2b + c = 0, \\ c = -8, \end{cases}$  解得  $\begin{cases} b = -2, \\ c = -8, \end{cases}$   $\therefore$  抛物线的表达式为  $y = x^2 - 2x - 8$ .

(2) 由  $y = x^2 - 2x - 8$  可知, 抛物线对称轴为直线  $x = 1$ . 由抛物线的对称性可知, 点  $A$  与点  $B$  关于对称轴对称. 如图, 设  $BC$  交对称轴于点  $D$ , 连结  $AD$ , 则  $AD = BD$ . 由两点之间线段最短可知, 此时  $AD + CD$  最小, 而  $AC$  的长度是定值, 故此时  $\triangle ACD$  的周长取得最小值. 由  $y = x^2 - 2x - 8$  可知, 点  $B$  的坐标为  $(4, 0)$ . 设直线  $BC$  的表达式为  $y = kx - 8$ . 将点  $B(4, 0)$  代入, 得  $k = 2$ ,  $\therefore$  直线  $BC$  的表达式为  $y = 2x - 8$ . 当  $x = 1$  时,  $y = -6$ ,  $\therefore$  点  $D$  的坐标为  $(1, -6)$ .



### 思路分析

(3) 过点  $M$  作  $MI \perp x$  轴交  $BC$  于点  $I$ , 过点  $N$  作  $NH \perp x$  轴交  $BC$  于点  $H$ , 过点  $P$  作  $PQ \perp x$  轴交  $BC$  于点  $Q$ , 可以推出  $\triangle EMI \sim \triangle EPQ$ ,  $\triangle FNH \sim \triangle FPQ$ , 进而推出  $\frac{ME}{EP} = \frac{NF}{FP} = \frac{MI - NH}{PQ}$ . 设  $M(m, 0)$ , 则  $N(m + 2, 0)$ , 用含  $m$  的代数式表示出  $MI, NH$ , 得到  $MI - NH = 1$ , 然后结合  $PQ = y_P - y_Q = -\frac{1}{2}a^2 + 2a = -\frac{1}{2}(a - 2)^2 + 2$  求解即可.

### 思路分析

(2) 设  $BC$  交对称轴于点  $D$ , 由抛物线的对称性可知  $AD = BD$ , 由两点之间线段最短可知, 此时  $AD + CD$  有最小值, 而  $AC$  的长度是定值, 故此时  $\triangle ACD$  的周长取得最小值, 求出直线  $BC$  的表达式, 即可得到答案.

3. 【解】(1)  $\because$  点  $C(0, 5)$  在抛物线  $y = -x^2 - 4x + c$  上,  $\therefore c = 5, \therefore y = -x^2 - 4x + 5$ . 令  $y = 0$ , 得  $0 = -x^2 - 4x + 5$ , 解得  $x = 1$  或  $-5$ ,  $\therefore$  点  $A$  的坐标为  $(-5, 0)$ .

(2) 由(1)知,  $B(1, 0)$ . 过  $P$  作  $PE \perp AC$  于点  $E$ , 作  $PF \perp x$  轴交  $AC$  于点  $H$ , 如图.  $\because A(-5, 0), C(0, 5), \therefore OA = OC, \therefore \triangle AOC$  是等腰直角三角形,  $\therefore \angle CAO = 45^\circ$ .  $\because PF \perp x$  轴,  $\therefore \angle AHF = 45^\circ = \angle PHE$ ,  $\therefore \triangle PHE$  是等腰直角三角形,  $\therefore PE = \frac{PH}{\sqrt{2}}$ .

$\therefore$  当  $PH$  最大时,  $PE$  最大. 设直线  $AC$  的表达式为  $y = kx + 5$ , 将  $A(-5, 0)$  代入得  $0 = -5k + 5$ ,  $\therefore k = 1, \therefore$  直线  $AC$  的表达式为  $y = x + 5$ . 设  $P(m, -m^2 - 4m + 5) (-5 < m < 0)$ , 则  $H(m, m + 5), \therefore PH = (-m^2 - 4m + 5) - (m + 5) = -\left(m + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{4}$ .  $\because a = -1 < 0, \therefore$  当  $m = -\frac{5}{2}$  时,

$PH$  取得最大值, 为  $\frac{25}{4}, \therefore PE = \frac{25}{4\sqrt{2}} = \frac{25\sqrt{2}}{8}$ .

$\therefore$  点  $P$  到直线  $AC$  距离的最大值为  $\frac{25\sqrt{2}}{8}$ .

4. 【解】(1) 把点  $B(4, 0)$  代入  $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + 2$

中, 得  $-8 + 4b + 2 = 0$ , 解得  $b = \frac{3}{2}, \therefore$  二次函数的

表达式为  $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$ .  $\therefore$  二次函数的图象与  $y$  轴交于点  $C, \therefore$  点  $C$  的坐标为  $(0, 2)$ .

设直线  $BC$  的表达式为  $y = sx + t (s \neq 0)$ . 将点  $C(0, 2), B(4, 0)$  代入上式, 得  $\begin{cases} 2 = t, \\ 0 = 4s + t, \end{cases}$

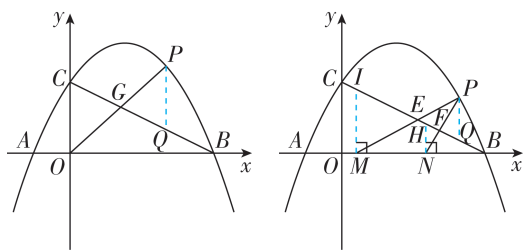
解得  $\begin{cases} s = -\frac{1}{2}, \\ t = 2, \end{cases} \therefore$  直线  $BC$  的表达式为  $y = -\frac{1}{2}x + 2$ .

(2) 如图(1), 过点  $P$  作  $PQ \parallel y$  轴交  $BC$  于点  $Q$ . 设  $P\left(a, -\frac{1}{2}a^2 + \frac{3}{2}a + 2\right) (0 < a < 4)$ , 则  $Q\left(a, -\frac{1}{2}a + 2\right), \therefore PQ = y_P - y_Q = -\frac{1}{2}a^2 + 2a$ .

$\because PQ \parallel y$  轴,  $\therefore \triangle GPQ \sim \triangle GOC, \therefore \frac{PQ}{OC} = \frac{GP}{OG}$ .  $\because 3OG = 4GP, OC = 2, \therefore PQ = -\frac{1}{2}a^2 + 2a = \frac{3}{2}$ ,  $\therefore a^2 - 4a + 3 = 0$ , 解得  $a_1 = 1, a_2 = 3, \therefore$  点  $P$  的坐标为  $(1, 3)$  或  $(3, 2)$ .

### 大招解读 | 代数法求线段最值

二次函数图象中求平行于坐标轴的线段最值问题时, 常用代数法: 设出动点坐标, 利用坐标表示出线段长度, 构造二次函数, 利用二次函数的性质求最值.



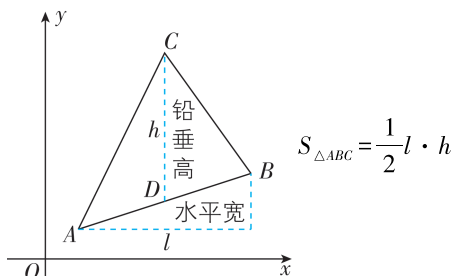
图(1)

图(2)

(3) 如图(2), 过点  $M$  作  $MI \perp x$  轴交  $BC$  于点  $I$ , 过点  $N$  作  $NH \perp x$  轴交  $BC$  于点  $H$ , 过点  $P$  作  $PQ \perp x$  轴交  $BC$  于点  $Q$ ,  $\therefore MI \parallel NH \parallel PQ$ ,  $\therefore \triangle EMI \sim \triangle EPQ$ ,  $\triangle FNH \sim \triangle FPQ$ ,  $\therefore \frac{ME}{EP} = \frac{MI}{PQ}$ ,  $\frac{NF}{FP} = \frac{NH}{PQ}$ ,  $\therefore \frac{ME}{EP} - \frac{NF}{FP} = \frac{MI - NH}{PQ}$ . 设  $M(m, 0)$ , 则  $N(m+2, 0)$ , 把它们的横坐标代入  $y = -\frac{1}{2}x + 2$  中, 得  $MI = y_I = -\frac{1}{2}m + 2$ ,  $NH = y_H = -\frac{1}{2}(m+2) + 2$ ,  $\therefore MI - NH = 1$ . 由(2)知  $PQ = y_P - y_Q = -\frac{1}{2}a^2 + 2a = -\frac{1}{2}(a-2)^2 + 2$ .  $\therefore 0 < a < 4$ ,  $\therefore a = 2$  时,  $PQ$  取得最大值, 为 2,  $\therefore \frac{ME}{EP} - \frac{NF}{FP}$  的最小值为  $\frac{1}{2}$ .

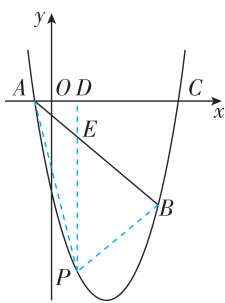
### 大招解读 | 铅垂法巧求面积最值

铅垂法是一种求三角形面积的特殊方法, 主要解决的是斜三角形面积问题. 具体公式为三角形面积等于水平宽和铅垂高乘积的一半. 三角形的水平宽指的是两个顶点之间的水平距离, 而铅垂高是指从一个顶点到对边的铅垂高度.



5. 【解】(1) 设  $y = a(x+1)(x-6)$  ( $a \neq 0$ ). 把  $B(5, -6)$  代入, 得  $a(5+1)(5-6) = -6$ , 解得  $a = 1$ ,  $\therefore$  抛物线的表达式为  $y = (x+1)(x-6) = x^2 - 5x - 6$ .

(2) 如图, 连结  $AP, BP$ , 过点  $P$  作  $PD \perp x$  轴于点  $D$ , 交  $AB$  于点  $E$ . 由  $A(-1, 0), B(5, -6)$ , 易得直线  $AB$  的表达式为  $y = -x - 1$ . 设  $P(m, m^2 - 5m - 6)$  ( $-1 < m < 5$ ), 则  $E(m, -m - 1)$ ,  $\therefore PE = (-m - 1) - (m^2 - 5m - 6)$ .



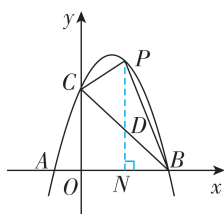
### 关键点拨

(2) 先求出直线  $BC$  的表达式, 易知  $PD$  取最大值时,  $\triangle BCP$  面积最大, 利用坐标将  $PD$  的长表示出来, 根据二次函数的最值就可以求出点  $P$  的坐标.

$5m - 6) = -m^2 + 4m + 5$ ,  $\therefore S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} PE \cdot (x_B - x_A) = \frac{1}{2} (-m^2 + 4m + 5) \times 6 = -3(m-2)^2 + 27$ ,  $\therefore$  当  $m = 2$  时,  $S_{\triangle ABP}$  最大, 此时  $P(2, -12)$ .

6. 【解】(1)  $A(-1, 0), B(3, 0), C(0, 3)$ . 当  $x = 0$  时,  $y = 3$ ,  $\therefore C(0, 3)$ . 当  $y = 0$  时,  $-x^2 + 2x + 3 = 0$ , 解得  $x_1 = 3, x_2 = -1$ ,  $\therefore A(-1, 0), B(3, 0)$ .

(2) 如图, 过点  $P$  作  $PN \perp x$  轴于点  $N$ , 交  $BC$  于点  $D$ , 则  $S_{\triangle BCP} = \frac{1}{2} PD \cdot OB$ .  $\because B(3, 0)$ ,  $\therefore OB = 3$ ,  $\therefore S_{\triangle BCP} = \frac{1}{2} PD \cdot OB = \frac{3}{2} PD$ .



设直线  $BC$  的表达式为  $y = kx + b$ , 把  $B(3, 0), C(0, 3)$  代入, 得  $\begin{cases} 3k + b = 0 \\ b = 3 \end{cases}$ , 解得  $\begin{cases} k = -1 \\ b = 3 \end{cases}$ ,  $\therefore$  直线  $BC$  的表达式为  $y = -x + 3$ . 设  $P(m, -m^2 + 2m + 3)$  ( $0 < m < 3$ ), 则  $D(m, -m + 3)$ ,  $\therefore PD = -m^2 + 2m + 3 - (-m + 3) = -m^2 + 3m = -\left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$ ,  $\therefore$  当  $m = \frac{3}{2}$  时,  $PD$  取最大值, 则  $\triangle BCP$  的面积最大, 此时  $P\left(\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right)$ .

## 26.3 实践与探索

### 课时 1 抛物线形实际问题



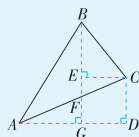
### 刷基础

1. D 【解析】由  $y = a(x-6)^2 + 2.6$  知, 当  $x = 6$  时,  $y$  取得最大值 2.6,  $\therefore$  运行的最大高度是 2.6 m, 故 A 错误;  $\because$  球从点  $O$  正上方 2 m 的  $A$  处发出,  $\therefore y = a(x-6)^2 + 2.6$  的图象经过点  $(0, 2)$ ,  $\therefore 2 = a(0-6)^2 + 2.6$ , 解得  $a = -\frac{1}{60}$ , 故 B 错误; 当  $x = 9$  时,  $y = -\frac{1}{60}(9-6)^2 + 2.6 = 2.45$ ,  $\therefore 2.45 > 2.43$ ,  $\therefore$  球会过球网. 当  $x = 18$  时,  $y = -\frac{1}{60}(18-6)^2 + 2.6 = 0.2$ .  $\because 0.2 > 0$ ,  $\therefore$  球会出界, 故 C 错误, D 正确. 故选 D.

2. 8 【解析】由题意可知, 在调整喷头高度的过程中, 水柱的形状不发生变化. 当喷头高 2.5 m 时, 可设  $y = ax^2 + bx + 2.5$ . 将  $(2.5, 0)$  代入表达式, 得出  $2.5a + b + 1 = 0$ ; ① 喷头高 4 m 时, 可设  $y = ax^2 + bx + 4$ . 将  $(3, 0)$  代入表达式, 得  $9a + 3b + 4 = 0$ . ② 联立①②可求出  $a = -\frac{2}{3}$ ,  $b = \frac{2}{3}$ . 设喷头高  $h$  m 时, 水柱落点距  $O$  点

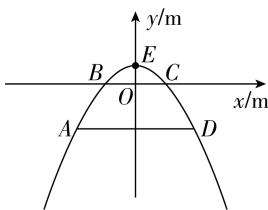
### 结论证明

证明: 如图,  $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABF} + S_{\triangle BCF} = \frac{1}{2} BF \cdot AG + \frac{1}{2} BF \cdot EC = \frac{1}{2} BF \cdot (AG + EC) = \frac{1}{2} BF \cdot (AG + GD) = \frac{1}{2} BF \cdot AD$ .



4 m, 此时的表达式为  $y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + h$ , 将  $(4, 0)$  代入可得  $-\frac{2}{3} \times 4^2 + \frac{2}{3} \times 4 + h = 0$ , 解得  $h = 8$ . 故答案为 8.

3. B 【解析】建立平面直角坐标系, 如图.



$\therefore$  抛物线最高点的五角星 (点 E) 到 BC 的距离为 0.6 m,  $BC = 2$  m,  $\therefore$  点 C 的坐标为  $(1, 0)$ , 点 B 的坐标为  $(-1, 0)$ , 点 E 的坐标为  $(0, 0.6)$ . 设抛物线的表达式为  $y = a(x+1)(x-1)$ . 将点 E 的坐标代入, 得  $a(0+1)(0-1) = 0.6$ , 解得  $a = -0.6$ ,  $\therefore$  抛物线的表达式为  $y = -0.6(x+1)(x-1)$ .  $\therefore AD = 4$  m,  $\therefore$  点 D 的横坐标为 2,  $\therefore$  点 D 的纵坐标为  $-0.6 \times (2+1) \times (2-1) = -1.8$ ,  $\therefore$  点 C 到 AD 的距离为 1.8 m. 故选 B.

4. 【解】(1) 由题意可得  $A(-5, 0)$ ,  $B(5, 0)$ ,  $M(0, 6)$ . 设大孔所在抛物线的表达式为  $y = ax^2 + 6$ . 把点  $A(-5, 0)$  代入, 得  $25a + 6 = 0$ , 解得  $a = -\frac{6}{25}$ ,  $\therefore$  大孔所在抛物线的表达式为  $y = -\frac{6}{25}x^2 + 6$ .

(2) 当  $x = 2$  时,  $y = -\frac{6}{25}x^2 + 6 = -\frac{6}{25} \times 2^2 + 6 = \frac{126}{25}$ .  $\therefore \frac{126}{25} - 4.5 = \frac{27}{50}$  (m)  $> 0.5$  m,  $\therefore$  这艘船在正常水位时能安全通过拱桥大孔.

(3) 由  $NC = 4$  m, 可知点 F 的纵坐标为 4, 代入  $y = -\frac{6}{25}x^2 + 6$ , 得  $-\frac{6}{25}x^2 + 6 = 4$ , 解得  $x = \pm \frac{5\sqrt{3}}{3}$ . 由抛物线对称性可知点 E 的坐标为  $(-\frac{5\sqrt{3}}{3}, 4)$ , 点 F 的坐标为  $(\frac{5\sqrt{3}}{3}, 4)$ ,  $\therefore EF = \frac{10\sqrt{3}}{3}$  m.

答: 此时大孔的水面宽度 EF 为  $\frac{10\sqrt{3}}{3}$  m.

### 刷提升

1. 【解】(1) ①建立如图(1)所示的平面直角坐标系. 由题意可知  $A(0, 1)$ ,  $E(4, 3.4)$ ,  $C(6, 3.4)$ . 设改造前的抛物线表达式为  $y_1 = ax^2 +$

$$bx + c, \therefore \begin{cases} c = 1, \\ 16a + 4b + c = 3.4, \\ 36a + 6b + c = 3.4, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a = -\frac{1}{10}, \\ b = 1, \\ c = 1, \end{cases}$$

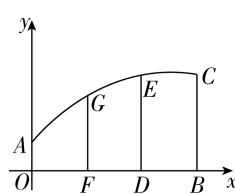
$\therefore$  改造前大棚所在抛物线的函数表达式为  $y_1 = -\frac{1}{10}x^2 + x + 1$ .

### 关键点拨

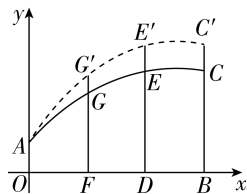
(2) 求出  $x = 2$  时  $y$  的值, 与 4.5 作差, 比较差与 0.5 的大小即可.

### 思路分析

(2) 根据已知条件表示出  $G'$ ,  $E'$  的坐标, 得到关于  $m$  的不等式, 进而得到  $CC'$  的最大值.



图(1)



图(2)

②如图(2), 根据题意建立平面直角坐标系.

由①知改造前抛物线的表达式为  $y_1 = -\frac{1}{10}x^2 + x + 1$ ,  $\therefore$  对称轴为直线  $x = -\frac{1}{2 \times (-\frac{1}{10})} = 5$ . 设

改造后抛物线的表达式为  $y_2 = ex^2 + dx + 1$ .  $\therefore$  调整后 C 与 E 上升相同的高度,  $\therefore$  对称轴为直线  $x = 5$ ,  $\therefore -\frac{d}{2e} = 5$ ,  $\therefore d = -10e$ . 当  $x = 6$  时,  $y_2 = 4.4$ ,  $\therefore 36e + 6d + 1 = 4.4$ ,  $\therefore e = -\frac{17}{120}$ ,  $d = \frac{17}{12}$ ,

$\therefore$  改造后的抛物线表达式为  $y_2 = -\frac{17}{120}x^2 + \frac{17}{12}x + 1$ . 当  $x = 2$  时, 改造前:  $y_1 = -\frac{1}{10} \times 2^2 + 2 + 1 = \frac{13}{5}$ ; 改造后:  $y_2 = -\frac{17}{120} \times 2^2 + \frac{17}{12} \times 2 + 1 = \frac{49}{15}$ ,

$\therefore GG' = y_2 - y_1 = \frac{49}{15} - \frac{13}{5} = \frac{2}{3}$  (米),  $\therefore GG'$  的长度为  $\frac{2}{3}$  米.

(2) 建立与(1)相同的平面直角坐标系. 设改造后抛物线的表达式为  $y = mx^2 - 10mx + 1$ .  $\therefore$  当  $x = 2$  时,  $y = m \times 2^2 - 10m \times 2 + 1 = -16m + 1$ , 当  $x = 4$  时,  $y = m \times 4^2 - 10m \times 4 + 1 = -24m + 1$ ,  $\therefore G'(2, -16m + 1)$ ,  $E'(4, -24m + 1)$ ,  $\therefore EE' + GG' = -24m + 1 - 16m + 1 - (3.4 + \frac{13}{5}) = -40m - 4$ .

4. 由题意可列不等式  $(-40m - 4) \times 200 \times 60 \leq 32\ 000$ , 解得  $m \geq -\frac{1}{6}$ .  $\therefore CC' = EE' = -24m + 1 - 3.4 = -24m - 2.4$ , 要使  $CC'$  最大, 需使  $m$  最小,  $\therefore$  当  $m = -\frac{1}{6}$  时,  $CC'$  的值最大, 最大值为 1.6 米.

### 刷素养

2. 【解】(1) ①由题意得  $A(2, 2)$  是上边缘抛物线的顶点, 设上边缘抛物线的函数表达式为  $y = a(x - 2)^2 + 2$ . 又  $\therefore$  抛物线过点  $(0, 1.5)$ ,  $\therefore 1.5 = 4a + 2$ ,  $\therefore a = -\frac{1}{8}$ ,  $\therefore$  上边缘抛物线的函数表达式为  $y = -\frac{1}{8}(x - 2)^2 + 2$ . 当  $y = 0$  时,



$0 = -\frac{1}{8}(x-2)^2 + 2$ , 解得  $x_1 = 6, x_2 = -2$  (舍去),

$\therefore C(6, 0)$ ,  $\therefore$  喷出水的最大射程  $OC$  为 6 m.

② $\because$  上边缘抛物线的对称轴为直线  $x = 2$ ,  $\therefore$  点  $(0, 1.5)$  的对称点为  $(4, 1.5)$ ,  $\therefore$  下边缘抛物线是由上边缘抛物线向左平移 4 m 得到的,  $\therefore$  点  $B$  的坐标为  $(2, 0)$ .

③上边缘: $\because EF = 0.5$  m,  $\therefore$  点  $F$  的纵坐标为 0.5,  $\therefore$  令  $y = 0.5$ , 则  $0.5 = -\frac{1}{8}(x-2)^2 + 2$ , 解

得  $x = 2 \pm 2\sqrt{3}$ .  $\because x > 0$ ,  $\therefore x = 2 + 2\sqrt{3}$ .  $\because$  当  $x > 2$  时,  $y$  随  $x$  的增大而减小,  $\therefore$  当  $2 \leq x \leq 6$  时, 要使  $y \geq 0.5$ , 则  $2 \leq x \leq 2 + 2\sqrt{3}$ .  $\because$  当  $0 \leq x < 2$  时,  $y$  随  $x$  的增大而增大, 且  $x = 0$  时,  $y = 1.5 > 0.5$ ,  $\therefore$  当  $0 \leq x \leq 6$  时, 要使  $y \geq 0.5$ , 则  $0 \leq x \leq 2 + 2\sqrt{3}$ .  $\therefore DE = 3$  m,  $\therefore$  灌溉车行驶时喷出的水能

浇灌到整个绿化带时  $d$  的最大值为  $2 + 2\sqrt{3} - 3 = 2\sqrt{3} - 1$ . 下边缘: 喷出的水能浇灌到绿化带底部的条件是  $d \geq OB$ ,  $\therefore d$  的最小值为 2.

综上所述,  $d$  的取值范围是  $2 \leq d \leq 2\sqrt{3} - 1$ .

(2)  $h$  的最小值为  $\frac{65}{32}$ . 当喷水口高度最低, 且

恰好能浇灌到整个绿化带时, 点  $D, F$  恰好分别在两条抛物线上. 设点  $D\left(m, -\frac{1}{8}(m+2)^2 + h + 0.5\right)$ ,  $F\left(m+3, -\frac{1}{8}(m+3-2)^2 + h + 0.5\right)$ ,

则有  $-\frac{1}{8}(m+3-2)^2 + h + 0.5 - \left[-\frac{1}{8}(m+2)^2 + h + 0.5\right] = 1$ , 解得  $m = 2.5$ ,  $\therefore$  点  $D$  的纵坐标为

$h - \frac{65}{32}$ ,  $\therefore h - \frac{65}{32} = 0$ , 则  $h = \frac{65}{32}$ ,  $\therefore h$  的最小值为  $\frac{65}{32}$ .

## 课时 2 二次函数与一元二次方程 (不等式) 的关系

### 刷基础

1. **B** 【解析】由图象可知, 二次函数  $y = -x^2 + mx + n$  图象的对称轴为直线  $x = 2$ .  $\because$  图象与  $x$  轴的一个交点坐标为  $(5, 0)$ ,  $\therefore$  图象与  $x$  轴的另一个交点坐标为  $(-1, 0)$ ,  $\therefore$  关于  $x$  的一元二次方程  $-x^2 + mx + n = 0$  的两实数根是  $x_1 = 5, x_2 = -1$ . 故选 B.

2.  $c > \frac{1}{4}$  【解析】 $\because$  抛物线  $y = x^2 - x + c$  ( $c$  是常数)

与  $x$  轴没有交点,  $\therefore \Delta = 1 - 4c < 0$ ,  $\therefore c > \frac{1}{4}$ . 故答

案为  $c > \frac{1}{4}$ .

### 关键点拨

(2) 当喷水口高度最低, 且恰好能浇灌到整个绿化带时, 点  $D, F$  恰好分别在两条抛物线上, 设出点  $D, F$  坐标计算即可.

### 易错警示

若函数  $y = ax^2 + bx + c$  的图象与  $x$  轴有交点, 则需分  $a \neq 0$  和  $a = 0$  两种情况进行讨论, 不要因忽略  $a = 0$  的情况而漏解.

3.  $x_1 = 2, x_2 = 6$  【解析】由题意可得, 二次函数  $y_2 = a(x-2)^2 + b(x-2)$  的图象是由二次函数  $y_1 = ax^2 + bx$  ( $a, b$  为实数,  $a < 0$ ) 的图象向右平移 2 个单位得到的,  $\therefore$  当点  $(m, n)$  在  $y_1$  的图象上时,  $(m+2, n)$  在  $y_2$  的图象上, 且平移后的抛物线的对称轴是直线  $x = 4$ .  $\because$  点  $(m-2, n)$  在  $y_2$  的图象上,  $\therefore y_2 = a(x-2)^2 + b(x-2)$  图象的对称轴是直线  $\frac{m-2+m+2}{2} = m = 4$ ,  $\therefore$  点  $(2, n), (6, n)$  在  $y_2 = a(x-2)^2 + b(x-2)$  的图象上,  $\therefore$  方程  $a(x-2)^2 + b(x-2) = n$  的解是  $x_1 = 2, x_2 = 6$ . 故答案为  $x_1 = 2, x_2 = 6$ .

4. **7** 【解析】由题意得一元二次方程  $ax^2 + bx = -m$  有实数根, 则二次函数  $y = ax^2 + bx$  的图象与直线  $y = -m$  有交点. 由图象得,  $-m \geq -7$ , 解得  $m \leq 7$ ,  $\therefore m$  的最大值为 7. 故答案为 7.

5. **D** 【解析】 $\because$  抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  的顶点为  $(2, 5)$ ,  $\therefore$  对称轴为直线  $x = 2$ . 又 $\because$  对称轴左侧函数图象与  $x$  轴交点横坐标的取值范围是  $-2 < x < -1$ ,  $\therefore$  对称轴右侧函数图象与  $x$  轴交点横坐标的取值范围是  $5 < x < 6$ ,  $\therefore$  一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0$  的正数解的取值范围是  $5 < x < 6$ . 故选 D.

6. **B** 【解析】 $\because$  二次函数  $y = x^2 - 5x + c$ ,  $\therefore$  对称轴为直线  $x = \frac{5}{2}$ . 观察题中表格, 得方程  $x^2 - 5x + c = 0$  的一个近似根 (精确到 0.1) 是 1.5,  $\therefore$  另一个近似根为 3.5, 故选 B.

7. **D** 【解析】由抛物线和  $y$  轴的交点为  $(0, 3)$ , 对称轴为直线  $x = 1$ , 可知当  $x = 0$  或  $x = 2$  时,  $y = 3$ , 故不等式  $ax^2 + bx + c < 3$  的解集为  $x < 0$  或  $x > 2$ . 故选 D.

8. (1) 【解】 $\because$  二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  的图象经过  $A(-1, 0), B(3, 0)$ ,  $\therefore$  设函数表达式为  $y = a(x+1)(x-3)$ . 将点  $C(0, -3)$  代入得  $-3 = -3a$ , 解得  $a = 1$ ,  $\therefore$  二次函数的表达式为  $y = (x+1)(x-3)$ , 即  $y = x^2 - 2x - 3$ ,  $\therefore$  该二次函数的表达式为  $y = x^2 - 2x - 3$ .

(2) ① 0 或 2 ②  $x < -1$  或  $x > 3$   $-1 < x < 3$  且  $x \neq 1$  【解析】① 由 (1) 知  $y = x^2 - 2x - 3$ , 由  $x^2 - 2x - 3 = -3$ , 解得  $x = 0$  或 2; 由  $x^2 - 2x - 3 = -4$ , 解得  $x_1 = x_2 = 1$ . ② 从题中图象可知当  $y > 0$  时,  $x$  的取值范围为  $x < -1$  或  $x > 3$ ; 当  $-4 < y < 0$  时,  $x$  的取值范围为  $-1 < x < 3$  且  $x \neq 1$ .

### 刷易错

9.  $-1$  或  $-9$  或 0 【解析】当  $a \neq 0$  时,  $\therefore$  关于  $x$  的函数  $y = ax^2 - (a+3)x - 1$  的图象与  $x$  轴只有一个公共点,  $\therefore [-(a+3)]^2 - 4a \cdot (-1) = a^2 +$

$10a+9=0$ , 解得  $a=-1$  或  $-9$ ; 当  $a=0$  时,  $y=-3x-1$ , 其图象与  $x$  轴只有一个公共点. 综上,  $a$  的值为  $-1$  或  $-9$  或  $0$ . 故答案为  $-1$  或  $-9$  或  $0$ .

### 刷提升

1. **B** 【解析】由图象可得, 该二次函数图象与  $x$  轴无交点, 顶点在第二象限,  $\therefore$  一元二次方程  $ax^2+bx+c=0$  无解,  $\therefore b^2-4ac<0$ . 当  $x=-1$  时,  $y=a-b+c>0$ ,  $\therefore$  点  $A(b^2-4ac, a-b+c)$  在第二象限. 故选 B.

2. **B** 【解析】将抛物线  $y=-x^2+4x-2$  向上平移  $m(m>0)$  个单位长度后得到抛物线  $y=-x^2+4x-2+m$ , 对称轴为直线  $x=2$ .  $\therefore y=-x^2+4x-2+m$  的图象在  $-1<x<4$  范围内与  $x$  轴只有一个交点,  $\therefore$  当  $(-1, 0)$  在抛物线上时,  $0=-1-4-2+m$ , 解得  $m=7$ ; 当  $(4, 0)$  在抛物线上时,  $0=-16+16-2+m$ , 解得  $m=2$ ,  $\therefore 2\leq m<7$ . 故选 B.

3. **A** 【解析】当  $y\geq -2$  时,  $mx^2+nx\geq -2$ , 即  $mx^2+nx+2\geq 0$ .  $\therefore$  当  $y\geq -2$  时,  $x$  的取值范围为  $x\leq 3t-6$  或  $x\geq -2-3t$ ,  $\therefore x=3t-6$  或  $x=-2-3t$  是方程  $mx^2+nx+2=0$  的两个根,  $\therefore -\frac{n}{m}=3t-6-2-3t=-8$ ,  $\therefore n=8m$ ,  $\therefore y=mx^2+nx=mx^2+8mx=m(x+4)^2-16m$ ,  $\therefore$  直线  $x=-4$  是该函数图象的对称轴, 且  $-16m\leq -2$ ,  $\therefore m\geq \frac{1}{8}$ .  $\therefore$  抛物线  $y=mx^2+8mx$  经过点  $A(c, 4)$ ,  $\therefore mc^2+8mc=4$ ,  $\therefore m=\frac{4}{c^2+8c}$ ,  $\therefore \frac{4}{c^2+8c}\geq \frac{1}{8}$ ,  $\therefore 0<c^2+8c\leq 32$ ,  $\therefore -32<c^2+8c-32\leq 0$ . 设抛物线  $y=c^2+8c-32$ , 令  $0=c^2+8c-32$ , 解得  $c_1=-4-4\sqrt{3}$ ,  $c_2=-4+4\sqrt{3}$ ; 令  $-32=c^2+8c-32$ , 解得  $c_3=0$ ,  $c_4=-8$ . 根据抛物线开口向上, 可得  $-32<c^2+8c-32\leq 0$  的解集为  $-4-4\sqrt{3}\leq c<-8$  或  $0<c\leq -4+4\sqrt{3}$ ,  $\therefore c$  的可能取值为  $2$ , 故选 A.

4.  $x_1=-2, x_2=5$  【解析】 $\therefore$  抛物线  $y=ax^2+bx+c$  经过  $A(-3, 0), B(4, 0)$  两点,  $\therefore$  关于  $x$  的一元二次方程  $ax^2+bx+c=0$  的解为  $x=-3$  或  $4$ .  $\therefore$  方程  $a(x-1)^2+c=b-bx$  可变形为方程  $a(x-1)^2+b(x-1)+c=0$ ,  $\therefore$  把方程  $a(x-1)^2+b(x-1)+c=0$  看作关于  $x-1$  的一元二次方程,  $\therefore x-1=-3$  或  $x-1=4$ ,  $\therefore x_1=-2, x_2=5$ , 即关于  $x$  的一元二次方程  $a(x-1)^2+c=b-bx$  的解为  $x_1=-2, x_2=5$ .

5.  $3<n<\frac{19}{4}$  【解析】 $\therefore$  二次函数  $y=x^2-x-n+1$  的图象与  $x$  轴有两个不同的交点  $A(x_1, 0), B(x_2, 0)$ , 即方程  $x^2-x-n+1=0$  有两个不相等

#### 思路分析

先根据平移得到平移后的抛物线的函数表达式, 再分别求出抛物线经过  $(-1, 0), (4, 0)$  时  $m$  的值, 进而可得其范围.

#### 思路分析

由  $y\geq -2$ ,  $x$  的取值范围为  $x\leq 3t-6$  或  $x\geq -2-3t$ , 可得  $x=3t-6$  或  $x=-2-3t$  是方程  $mx^2+nx+2=0$  的两个根, 则可得出  $n=8m$ , 再利用  $m$  的取值范围确定  $c$  的取值范围即可求解.

#### 思路分析

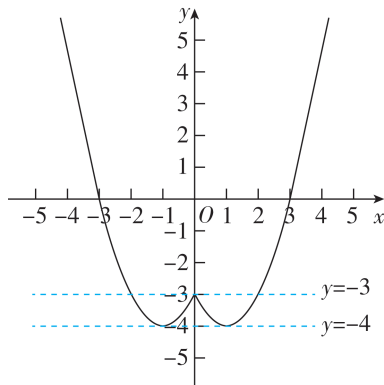
先依题意得  $\Delta=(-1)^2-4\times 1\times(-n+1)>0$ , 求出  $n>\frac{3}{4}$ , 再结合一元二次方程根与系数的关系得  $x_1+x_2=1, x_1x_2=-n+1$ , 故  $AB=|x_1-x_2|=\sqrt{4n-3}$ . 根据  $3<AB<4$  即可求解.

的实数根,  $\therefore \Delta=(-1)^2-4\times 1\times(-n+1)=1-4(-n+1)>0, x_1+x_2=1, x_1x_2=-n+1, \therefore n>\frac{3}{4}, AB=|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1^2-4(-n+1)}=\sqrt{4n-3}$ .  $\therefore 3<AB<4, \therefore 3<\sqrt{4n-3}<4, \therefore 9<4n-3<16, \therefore 12<4n<19, \therefore 3<n<\frac{19}{4}$ , 故答案为  $3<n<\frac{19}{4}$ .

6.  $x_1=1, x_2=-\frac{1}{3}$  【解析】 $\therefore$  抛物线与  $x$  轴的一个交点为  $(1, 0)$ , 且对称轴为直线  $x=-1$ ,  $\therefore$  抛物线与  $x$  轴的另一个交点为  $(-3, 0)$ ,  $\therefore$  方程  $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$  的解为  $x_1=1, x_2=-3$ . 方程  $ax^2+bx+c=0$  可变形为  $a+b\left(\frac{1}{x}\right)+c\left(\frac{1}{x}\right)^2=0$ , 设  $\frac{1}{x}=t$ , 可得  $ct^2+bt+a=0, \therefore t_1=1, t_2=-\frac{1}{3}$ , 则方程  $cx^2+bx+a=0$  的两个根为  $x_1=1, x_2=-\frac{1}{3}$ .

#### 刷素养

7. 【解】(1) 当  $x=-2$  时,  $y=(-2)^2-2\times|-2|-3=-3, \therefore m=-3$ . 故答案为  $-3$ .  
(2) 补全函数图象如图所示.



①观察函数图象可知, 函数  $y=x^2-2|x|-3$  的图象与直线  $y=-3$  只有 3 个交点,  $\therefore$  方程  $x^2-2|x|-3=-3$  有 3 个实数根. 故答案为 3.  
②观察图象可知, 关于  $x$  的方程  $x^2-2|x|-3=a$  有 4 个实数根时,  $a$  的取值范围是  $-4<a<-3$ . 故答案为  $-4<a<-3$ .  
③ $\therefore$  不等式  $x^2-2|x|>3$  的解集就是  $x^2-2|x|-3>0$  的解集,  $\therefore$  不等式  $x^2-2|x|>3$  的解集是函数  $y=x^2-2|x|-3$  的图象在  $x$  轴上方部分对应的  $x$  的取值范围,  $\therefore$  结合图象可得  $x<-3$  或  $x>3$ . 故答案为  $x<-3$  或  $x>3$ .

#### 课时 3 一次函数与二次函数图象的综合应用

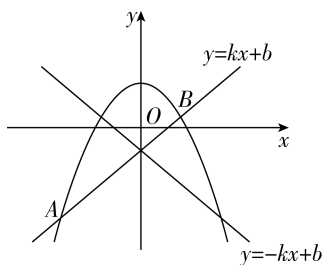
### 刷基础

1. **A** 【解析】联立方程组  $\begin{cases} y=ax^2+bx+c, \\ y=mx+n \end{cases}$  得到

$ax^2 + (b-m)x + (c-n) = 0$ . 方程  $ax^2 + (b-m)x + (c-n) = 0$  的解即为抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  与直线  $y = mx + n$  交点的横坐标. 由函数图象知, 抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  与直线  $y = mx + n$  的交点坐标为  $(0, -3)$  和  $(3, 0)$ , 所以方程  $ax^2 + (b-m)x + (c-n) = 0$  的解为  $x_1 = 0, x_2 = 3$ . 故选 A.

2.  $x_1 = 1, x_2 = 6$  【解析】由题意得, 当  $x = 0$  时,  $y = x^2 - 6x + m = m, \therefore C(0, m)$ . 又  $\because$  抛物线的表达式为  $y = x^2 - 6x + m, \therefore$  对称轴是直线  $x = -\frac{-6}{2 \times 1} = 3. \therefore$  点 B 是点 C 关于该二次函数图象的对称轴对称的点,  $\therefore B(6, m)$ .  $\therefore$  方程  $kx + b = x^2 - 6x + m$  的解可以看成直线  $y = kx + b$  与抛物线  $y = x^2 - 6x + m$  交点的横坐标,  $A(1, 0), B(6, m), \therefore$  方程  $kx + b = x^2 - 6x + m$  的解是  $x_1 = 1, x_2 = 6$ . 故答案为  $x_1 = 1, x_2 = 6$ .

3. D 【解析】 $\because$  抛物线  $y = ax^2 + c$  与直线  $y = kx + b$  交于点  $A(-4, p), B(2, q), \therefore$  抛物线  $y = ax^2 + c$  与直线  $y = -kx + b$  的交点横坐标分别为  $-2$  和  $4$ . 如图,  $\therefore$  不等式  $ax^2 + c < -kx + b$  的解集是  $x < -2$  或  $x > 4$ , 故选 D.



4.  $1 < x < 2$  【解析】将  $(-2, 3), (2, -1)$  代入  $y_1 = kx + b$ , 得  $\begin{cases} 3 = -2k + b, \\ -1 = 2k + b, \end{cases}$  解得  $\begin{cases} k = -1, \\ b = 1, \end{cases} \therefore y_1 = -x + 1$ . 令  $y_1 = 0$ , 则  $-x + 1 = 0$ , 解得  $x = 1, \therefore$  直线与  $x$  轴交点坐标为  $(1, 0), \therefore$  结合图象可知,  $1 < x < 2$  时,  $y_2 < y_1 < 0$ . 故答案为  $1 < x < 2$ .

5. 【解】(1) 令  $y = ax^2 - 4ax + 3a = 0$ , 解得  $x = 1$  或  $x = 3$ . 令  $x = 0$ , 则  $y = 3a, \therefore$  点 A, B, C 的坐标分别为  $(1, 0), (3, 0), (0, 3a)$ .

又  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times OC = \frac{1}{2} \times 2 \times 3a = 3$ , 解得  $a = 1$ ,  $\therefore$  抛物线的表达式为  $y = x^2 - 4x + 3$ .

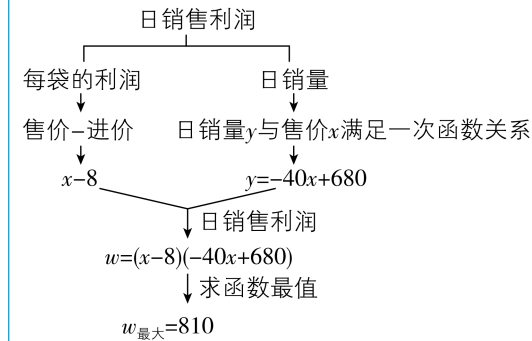
(2) 由 (1) 可知不等式组  $-1 < ax^2 - 4ax + 3a < 0$  即为  $-1 < x^2 - 4x + 3 < 0. \therefore x^2 - 4x + 3 > -1, \therefore x^2 - 4x + 4 > 0, \therefore (x-2)^2 > 0, \therefore x \neq 2. \therefore$  抛物线  $y = x^2 - 4x + 3$  与  $x$  轴交点横坐标分别为  $1, 3$ , 抛物线开口向上,  $\therefore$  由图象可得  $x^2 - 4x + 3 < 0$  的解集为  $1 < x < 3$ ,  $\therefore -1 < x^2 - 4x + 3 < 0$  的解集为  $1 < x < 3$  且  $x \neq 2$ .

思路分析 先由直线  $y = kx + b$  与直线  $y = -kx + b$  的对称性得到直线  $y = -kx + b$  与二次函数图象的交点的横坐标, 然后观察图象即可求解.

#### 关键点拨

根据已知条件可得出  $ax^2 - kx - a = 0$ , 再利用根与系数的关系得出  $\frac{k}{a} < 0$ , 分情况讨论即可.

#### 6. 思路分析



【解】(1) 设  $y$  与  $x$  之间的函数关系式为  $y = kx + b (k \neq 0)$ . 把  $x = 10, y = 280$  和  $x = 14, y = 120$  分别代入关系式, 得  $\begin{cases} 10k + b = 280, \\ 14k + b = 120, \end{cases}$  解得  $\begin{cases} k = -40, \\ b = 680, \end{cases} \therefore y$  与  $x$  之间的函数关系式为  $y = -40x + 680$ . (2) 设粽子的日销售利润为  $w$  元, 则  $w = (x - 8)(-40x + 680) = -40x^2 + 1000x - 5440 = -40\left(x - \frac{25}{2}\right)^2 + 810. \therefore -40 < 0$ , 抛物线开口向下,  $\therefore x = 12.5$  时,  $w$  有最大值, 最大值为  $810$ , 即当每袋粽子的售价定为  $12.5$  元/袋时, 日销售利润最大, 最大日销售利润是  $810$  元.

7. 【解】(1) 将  $(4, 0), (0, 2)$  分别代入  $y_1 = kx + n$ , 得  $\begin{cases} 4k + n = 0, \\ n = 2, \end{cases}$  解得  $\begin{cases} k = -\frac{1}{2}, \\ n = 2, \end{cases} \therefore$  直线的表达式为

$y_1 = -\frac{1}{2}x + 2$ . 将  $(4, 0), (0, 2)$  分别代入  $y_2 = -x^2 + bx + c$ , 得  $\begin{cases} -16 + 4b + c = 0, \\ c = 2, \end{cases}$  解得  $\begin{cases} b = 3.5, \\ c = 2, \end{cases} \therefore$  抛物线的表达式为  $y_2 = -x^2 + 3.5x + 2$ .

(2) 根据两函数图象的交点坐标为  $(0, 2), (4, 0)$ , 结合图象可得, 当  $y_1 > y_2$  时,  $x$  的取值范围为  $x < 0$  或  $x > 4$ .

(3) 连结  $OC$ . 设  $C$  的坐标为  $(x, -x^2 + 3.5x + 2)$ , 且  $0 < x < 4. \therefore S_{\triangle ABC} = 6, \therefore S_{\triangle AOC} + S_{\triangle BOC} - S_{\triangle AOB} = 6, \therefore \frac{1}{2} \times 4 \times (-x^2 + 3.5x + 2) + \frac{1}{2} \times 2x - \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 6$ , 整理得  $x^2 - 4x + 3 = 0$ , 解得  $x_1 = 1, x_2 = 3$ . 当  $x_1 = 1$  时,  $-x^2 + 3.5x + 2 = -1 + 3.5 + 2 = 4.5$ ; 当  $x_2 = 3$  时,  $-x^2 + 3.5x + 2 = -9 + 10.5 + 2 = 3.5$ . 综上,  $C$  的坐标为  $(1, 4.5)$  或  $(3, 3.5)$ .

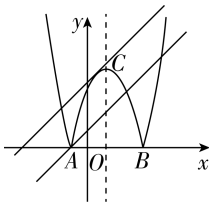
#### 刷提升

1. D 【解析】 $\because$  抛物线  $y = ax^2 - a (a \neq 0)$  与直线  $y = kx$  交于  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$  两点,  $\therefore$  令  $kx = ax^2 - a, \therefore ax^2 - kx - a = 0, \therefore x_1 + x_2 = \frac{k}{a}. \therefore x_1 + x_2 < 0, \therefore \frac{k}{a} < 0$ . 当  $a > 0, k < 0$  时, 直线  $y =$

$ax+k$  经过第一、三、四象限;当  $a<0, k>0$  时, 直线  $y=ax+k$  经过第一、二、四象限. 综上, 直线  $y=ax+k$  一定经过第一、四象限. 故选 D.

2. 1 或  $\frac{13}{4}$  【解析】 $\because$  抛物线的表达式为  $y =$

$(x-1)^2-4$ ,  $\therefore$  抛物线的顶点坐标为  $(1, -4)$ . 令  $y = 0$ , 则  $(x-1)^2-4 = 0$ , 解得  $x_1 = -1, x_2 = 3$ ,  $\therefore A(-1, 0), B(3, 0)$ . 如图, 点  $(1, -4)$  关于  $x$  轴的对称点为



$C(1, 4)$ ,  $\therefore$  曲线  $ACB$  所对应的函数表达式为  $y = -(x-1)^2 + 4 (-1 \leq x \leq 3)$ . 当直线  $y = x+b$  与新图象恰有三个公共点时, 如图所示. ①当直线  $y = x+b$  过点  $A$  时,  $0 = -1+b$ , 解得  $b = 1$ ; ②当直线  $y = x+b$  与抛物线  $y = -(x-1)^2 + 4 (-1 \leq x \leq 3)$  只有一个公共点时,  $-(x-1)^2 + 4 = x+b$ , 即  $x^2 - x - (3-b) = 0$ ,  $\therefore \Delta = 1 + 4(3-b) = 13 - 4b = 0$ , 解得  $b = \frac{13}{4}$ . 综上,  $b$  的值为 1 或  $\frac{13}{4}$ . 故答案为 1 或  $\frac{13}{4}$ .

3.  $x > -1$  且  $x \neq 1$  【解析】 $\because y_1 y_2 > 0$ , 且  $y_1 \geq 0$ ,  $\therefore y_1 \neq 0$  且  $y_2 > 0$ .  $\therefore$  点  $B(0, 2), C(3, 8)$  在一次函数  $y_2 = mx + n$  的图象上,  $\therefore \begin{cases} 2 = 0 \times m + n, \\ 8 = 3m + n, \end{cases}$  解得  $\begin{cases} m = 2, \\ n = 2, \end{cases} \therefore y_2 = 2x + 2$ . 当  $y_2 = 0$  时,  $0 = 2x + 2$ , 解得  $x = -1$ ,  $\therefore A$  点坐标为  $(-1, 0)$ .  $\because y_1 \neq 0$  且  $y_2 > 0$ , 抛物线的顶点坐标为  $(1, 0)$ ,  $\therefore x > -1$  且  $x \neq 1$ . 故答案为  $x > -1$  且  $x \neq 1$ .

4. 【解】(1) 由图象得, 当  $0 < x \leq 6$  时,  $p = 3.2$ . 当  $6 < x \leq 15$  时, 设直线表达式为  $p = tx + n$ . 将  $(6, 3.2), (15, 5)$  代入, 得  $\begin{cases} 6t + n = 3.2, \\ 15t + n = 5, \end{cases} \therefore \begin{cases} t = 0.2, \\ n = 2, \end{cases}$   $\therefore p = 0.2x + 2$ ,  $\therefore p$  与  $x$  之间的函数表达式为  $p = \begin{cases} 3.2 (0 < x \leq 6), \\ 0.2x + 2 (6 < x \leq 15). \end{cases}$

(2) ①当  $0 < x \leq 6$  时,  $w = (6 - 3.2) \times 45x = 126x$ ,  $\therefore$  当  $x = 6$  时,  $w_{\text{最大}} = 126 \times 6 = 756$  (元); 当  $6 < x \leq 15$  时,  $w = (6 - 0.2x - 2) \times (30x + 120) = -6x^2 + 96x + 480 = -6(x-8)^2 + 864$ .  $\therefore w = \begin{cases} 126x (0 < x \leq 6), \\ -6(x-8)^2 + 864 (6 < x \leq 15). \end{cases}$   $\because -6 < 0$ ,  $\therefore$  当  $x = 8$  时,  $w$  有最大值, 为 864.  $\because 864 > 756$ ,  $\therefore$  第 8 天的利润最大, 最大利润为 864 元.

②由①可知  $m = 8$ , 则  $m+1 = 9$ . 设第 9 天应提价  $a$  元. 由题意得  $w = (6 + a - 0.2 \times 9 - 2) \times (30 \times 9 + 120) = 390a + 858$ ,  $\therefore 390a + 858 - 864 \geq 72$ , 解得  $a \geq 0.2$ .

答: 第 9 天每只粽子至少应提价 0.2 元.

### 思路分析

(3) 根据抛物线的顶点在  $\triangle AOB$  的内部, 确定  $b$  的取值范围, 由于抛物线的对称轴为直线  $x = b$ , 再根据点  $C(\frac{1}{6}, y_1)$ , 点  $D(\frac{1}{2}, y_2)$  到对称轴的距离、抛物线的对称性和二次函数的增减性进行判断.

5. 【解】(1) ① $\because$  直线  $y = mx + 5$  交  $y$  轴于点  $B$ , 当  $x = 0$  时,  $y = 5$ ,  $\therefore B(0, 5)$ . 把  $B(0, 5)$  代入二次函数的表达式得  $5 = -b^2 + 4b + 1$ , 解得  $b_1 = b_2 = 2$ ,  $\therefore$  二次函数的表达式为  $y = -(x-2)^2 + 9$ .

② $x$  的取值范围是  $0 < x < 5$ . 由①知, 二次函数的表达式为  $y = -(x-2)^2 + 9$ , 当  $y = 0$  时,  $-(x-2)^2 + 9 = 0$ , 解得  $x_1 = 5, x_2 = -1$ ,  $\therefore A(5, 0)$ . 由图象得, 当  $mx + 5 < -(x-b)^2 + 4b + 1$  时,  $x$  的取值范围是  $0 < x < 5$ .

(2) 点  $M$  在直线  $y = 4x + 1$  上. 理由:  $\because$  点  $M$  为二次函数  $y = -(x-b)^2 + 4b + 1$  图象的顶点,  $\therefore M$  的坐标是  $(b, 4b + 1)$ . 把  $x = b$  代入  $y = 4x + 1$ , 得  $y = 4b + 1$ ,  $\therefore$  点  $M$  在直线  $y = 4x + 1$  上.

(3)  $\because A(5, 0)$ ,  $\therefore$  直线  $AB$  的表达式为  $y = -x + 5$ .  $\therefore$  二次函数  $y = -(x-b)^2 + 4b + 1$  图象的顶点

$M(b, 4b + 1)$  在  $\triangle AOB$  内部,  $\therefore \begin{cases} 0 < b < 5, \\ 0 < 4b + 1 < 5, \\ -b + 5 > 4b + 1, \end{cases}$

解得  $0 < b < \frac{4}{5}$ . 由抛物线的表达式可知, 其对称轴为直线  $x = b$ . 当点  $C, D$  关于对称轴对称时,  $b - \frac{1}{6} = \frac{1}{2} - b$ , 解得  $b = \frac{1}{3}$ .

①当  $0 < b < \frac{1}{3}$  时, 根据抛物线的对称性和二次函数的增减性可得  $y_1 > y_2$ ;

②当  $b = \frac{1}{3}$  时, 根据抛物线的对称性可得  $y_1 = y_2$ ;

③当  $\frac{1}{3} < b < \frac{4}{5}$  时, 根据抛物线的对称性和二次函数的增减性可得  $y_1 < y_2$ .

综上, 当  $0 < b < \frac{1}{3}$  时,  $y_1 > y_2$ ; 当  $b = \frac{1}{3}$  时,  $y_1 = y_2$ ;

当  $\frac{1}{3} < b < \frac{4}{5}$  时,  $y_1 < y_2$ .

## 大招专题 2 二次函数图象中的交点问题



### 刷难关

#### 大招解读 | 确定图形找临界状态

- (1) 根据已知条件画出确定的图形;
- (2) 将直线在坐标系中上下平移, 找到符合题意的临界位置 (常见位置: ①二次函数图象顶点; ②图象交点; ③与二次函数图象只有一个交点);
- (3) 联立直线和抛物线的表达式得一元二次方程, 利用  $\Delta$  求解;
- (4) 临界位置之间的部分即为满足题意的部分.

1. 【解】(1)  $c_1$  的表达式为  $y = -x^2 - 2x + 3$ .  $\therefore$  抛物线  $c_1$  的顶点为  $A(-1, 4)$ ,  $\therefore$  设抛物线  $c_1$  的表达式为  $y = a(x+1)^2 + 4$ . 把  $D(0, 3)$  代入  $y = a(x+1)^2 + 4$  得  $3 = a + 4$ ,  $\therefore a = -1$ ,  $\therefore$  抛物线  $c_1$



的表达式为  $y=-(x+1)^2+4$ , 即  $y=-x^2-2x+3$ .

$$(2) \text{ 由 } \begin{cases} y=-x^2-2x+3, \\ y=x+m, \end{cases} \text{ 得 } x^2+3x+m-3=0.$$

$\therefore$  直线  $l_1: y=x+m$  与  $c_1$  有唯一的交点,

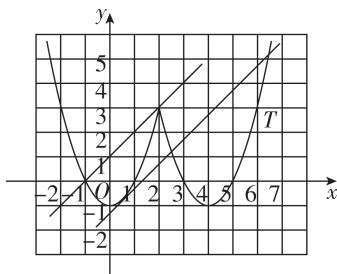
$$\therefore \Delta=9-4m+12=0, \therefore m=\frac{21}{4}.$$

(3)  $\because$  抛物线  $c_1$  关于  $y$  轴对称的抛物线记作  $c_2$ ,  $\therefore$  抛物线  $c_2$  的顶点坐标为  $(1, 4)$ , 与  $y$  轴的交点为  $D(0, 3)$ ,  $\therefore$  抛物线  $c_2$  的表达式为  $y=-x^2+2x+3$ . ①当直线  $l_2$  过抛物线  $c_1$  的顶点  $(-1, 4)$  和抛物线  $c_2$  的顶点  $(1, 4)$ , 即  $n=4$  时,  $l_2$  与  $c_1$  和  $c_2$  共有两个交点. ②当直线  $l_2$  过  $D(0, 3)$  时, 即  $n=3$  时,  $l_2$  与  $c_1$  和  $c_2$  共有三个交点. ③当  $3 < n < 4$  或  $n < 3$  时,  $l_2$  与  $c_1$  和  $c_2$  共有四个交点.

**2. D** 【解析】抛物线  $y=x^2+2x+a-2$  与坐标轴有且仅有两个交点, 分两种情况讨论: 当与  $x$  轴有一个交点, 与  $y$  轴有一个交点, 且不重合时, 令  $y=0$  得  $x^2+2x+a-2=0$ .  $\therefore$  与  $x$  轴有一个交点,  $\therefore \Delta=4-4(a-2)=0$ , 解得  $a=3$ ; 当与  $x$  轴有两个交点, 且其中一个交点与  $y$  轴交点相重合 (即过原点) 时, 此时  $a-2=0$ ,  $\therefore a=2$ . 综上,  $a$  的值为 2 或 3. 故选 D.

**3. A** 【解析】 $\because$  抛物线  $C_1: y=x^2-1$ , 将  $C_1$  向右平移 4 个单位长度, 得到抛物线  $C_2$ ,  $\therefore$  抛物线  $C_2$  的表达式为  $y=(x-4)^2-1$ .

联立  $\begin{cases} y=x^2-1, \\ y=(x-4)^2-1, \end{cases}$  解得  $\begin{cases} x=2, \\ y=3, \end{cases} \therefore$  两抛物线的交点坐标为  $(2, 3)$ . 由题意得图形  $T$  如图所示.



把  $(2, 3)$  代入  $y=x+n$ , 得  $3=2+n$ , 解得  $n=1$ . 当直线  $y=x+n$  与  $C_1$  只有一个交点时,  $x+n=x^2-1$ , 即  $x^2-x-1-n=0$  有两个相等的实数根,  $\therefore \Delta=1-4 \times 1 \times (-n-1)=0$ , 解得  $n=-\frac{5}{4}$ .  $\therefore$  直线  $y=x+n$  与图形  $T$  恰好有 4 个交点,  $\therefore$  结合图形可知,  $-\frac{5}{4} < n < 1$ . 故选 A.

**4.  $6 < k \leq 11$  或  $k=2$**  【解析】 $\because y=-x^2+4x-2$   $\Rightarrow -(x-2)^2+2$ ,  $\therefore$  该抛物线的对称轴为直线  $x=2$ . 将抛物线向上平移  $k(k>0)$  个单位长度后抛物线的表达式为  $y=-(x-2)^2+2+k$ . 当抛物线顶点恰好平移到线段  $MN$  上时,  $2+k=4$ , 解得  $k=2$ ; 当抛物线经过点  $M(0, 4)$  时,  $-(0-2)^2+2+k=4$ , 解得  $k=6$ , 此时  $M(0, 4)$  关于对

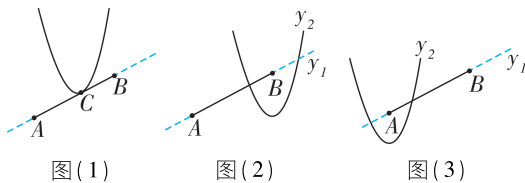
称轴直线  $x=2$  对称的点  $M'(4, 4)$  在线段  $MN$  上, 不符合题意; 当抛物线经过点  $N(5, 4)$  时,  $-(5-2)^2+2+k=4$ , 解得  $k=11$ , 此时  $N(5, 4)$  关于对称轴直线  $x=2$  对称的点  $N'(-1, 4)$  不在线段  $MN$  上, 符合题意. 故平移后的抛物线与线段  $MN$  仅有一个交点时,  $k=2$  或  $6 < k \leq 11$ . 故答案为  $k=2$  或  $6 < k \leq 11$ .

### 大招解读 | 端点值代入法

(1) 确定由抛物线和线段所在直线的表达式得到的方程;

(2) 抛物线与线段  $AB$  仅有一个交点  $C$  时:

情况 1: 如图 (1), 满足条件  $\Delta=0$  且  $x_A < x_C < x_B$ .



情况 2: 如图 (2), 满足条件  $\Delta > 0$  且  $x=x_B$  时,  $y_1 \geq y_2$ ;  $x=x_A$  时,  $y_2 > y_1$ .

情况 3: 如图 (3), 满足条件  $\Delta > 0$  且  $x=x_B$  时,  $y_2 > y_1$ ;  $x=x_A$  时,  $y_1 \geq y_2$ .

**5. 【解】** 设直线  $AB$  的表达式为  $y=kx+n(k \neq 0)$ . 把点  $A(0, -4)$  和  $B(-2, 2)$  代入得

$$\begin{cases} n=-4, \\ -2k+n=2, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} k=-3, \\ n=-4, \end{cases} \therefore \text{ 直线 } AB \text{ 的表达式}$$

为  $y=-3x-4$ . 把  $C(m, 5)$  代入, 得  $m=-3$ ,  $\therefore C(-3, 5)$ , 由平移得  $D(1, 5)$ .  $\therefore$  二次函数  $y=ax^2+bx+c$  的图象经过点  $A(0, -4)$  和  $B(-2,$

$2)$ ,  $\therefore \begin{cases} c=-4, \\ 4a-2b+c=2, \end{cases}$  解得  $\begin{cases} c=-4, \\ b=2a-3, \end{cases} \therefore y=ax^2+(2a-3)x-4$ . ①当  $a>0$  时, 若抛物线与线段  $CD$  只有一个公共点, 如图 (1), 则抛物线上的点  $(1, a+2a-3-4)$  在  $D$  点的下方,  $\therefore a+2a-3-4 < 5$ , 解得  $a < 4$ ,  $\therefore 0 < a < 4$ ;

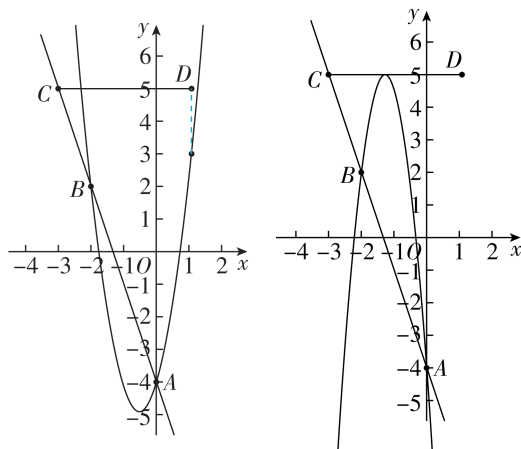


图 (1)

②当  $a < 0$  时, 若抛物线的顶点在线段  $CD$  上, 则抛物线与线段  $CD$  只有一个公共点. 如图

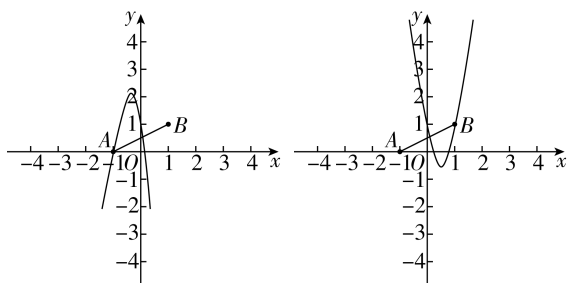
$$(2), \therefore \frac{4ac-b^2}{4a}=5, \text{ 即 } \frac{4a \times (-4) - (2a-3)^2}{4a}=5,$$

解得  $a = -3 + \frac{3}{2}\sqrt{3}$  (舍去) 或  $a = -3 - \frac{3}{2}\sqrt{3}$ .

综上,  $a$  的取值范围是  $0 < a < 4$  或  $a = -3 - \frac{3}{2}\sqrt{3}$ .

6.  $m \leq -2$  或  $1 \leq m < \frac{9}{8}$  【解析】①当  $m < 0$  时, 如

图(1), 抛物线对称轴为直线  $x = \frac{1}{2m} < 0$ ,  $\therefore x = -1$  时,  $y = mx^2 - x + 1 = m + 1 + 1 \leq 0$ , 解得  $m \leq -2$ ,  $\therefore m \leq -2$ ;



图(1)

②当  $m > 0$  时, 如图(2),  $\therefore$  点  $A(-1, 0)$ ,  $B(1, 1)$ , 设直线  $AB$  的表达式为  $y = kx + b$ ,

$$\therefore \begin{cases} -k + b = 0, \\ k + b = 1, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} k = \frac{1}{2}, \\ b = \frac{1}{2}, \end{cases} \therefore \text{ 直线 } AB \text{ 的表达式}$$

为  $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ . 令  $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = mx^2 - x + 1$ , 整理得

$$mx^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = 0. \therefore \text{ 二次函数 } y = mx^2 - x + 1 \text{ 的}$$

图象与线段  $AB$  有两个不同的交点,  $\therefore \Delta =$

$$\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 4m \times \frac{1}{2} > 0, \text{ 且 } x = 1 \text{ 时, } y = mx^2 - x + 1 =$$

$$m - 1 + 1 \geq 1, \therefore 1 \leq m < \frac{9}{8}.$$

综上,  $m$  的取值范围为  $m \leq -2$  或  $1 \leq m < \frac{9}{8}$ .

### 重难专题 1 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 $a, b, c$ 之间的关系

#### 刷难关

1. B 【解析】 $\therefore$  抛物线  $y = (a-2)x^2$  开口向下,  $\therefore a-2 < 0$ , 即  $a < 2$ . 故选 B.

2. -2 (答案不唯一) 【解析】当  $x = 0$  时,  $y = 0 + 0 + m = m$ ,  $\therefore$  抛物线与  $y$  轴的交点坐标为  $(0, m)$ .  $\therefore$  抛物线与  $y$  轴的交点在原点下方,  $\therefore m < 0$ ,  $\therefore m$  的值可以是 -2 (答案不唯一). 故答案为 -2 (答案不唯一).

3.  $m \leq 2$  【解析】抛物线的对称轴为直线  $x = -\frac{2m}{2} = m$ .  $\therefore$  当  $x > 2$  时,  $y$  的值随  $x$  值的增大而增大,  $\therefore m \leq 2$ . 故答案为  $m \leq 2$ .

4. D 【解析】把  $A(4, 2)$  代入  $y = -(x-t)^2 + t (t \geq$

#### 思路分析

把  $A, B$  的坐标分别代入抛物线表达式得到关于  $t$  的方程, 解方程求得  $t$  的值, 结合图象即可得到符合题意的  $t$  的取值范围.

0) 得  $2 = -(4-t)^2 + t$ , 解得

$t = 3$  或  $t = 6$ . 把  $B(4, 4)$  代入

$y = -(x-t)^2 + t (t \geq 0)$  得  $4 =$

$-(4-t)^2 + t$ , 解得  $t = 4$  或  $t =$

5. 如图, 结合图象可知, 当

$L$  与线段  $AB$  有公共点时,  $t$

的取值范围是  $3 \leq t \leq 4$  或  $5 \leq t \leq 6$ , 故选 D.

5. C 【解析】① $\because y_1 > 0$ ,  $\therefore$  当  $x = 1$  时,  $y_1 = a + b + c > 0$ , 故①正确. ② $\because a + b = 0$ ,  $\therefore a = -b$ ,  $\therefore$  函数

图象的对称轴是直线  $x = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}$ .  $\therefore \frac{1}{2} -$

$(-1) > 1 - \frac{1}{2}$ ,  $\therefore$  当  $a > 0$  时,  $y_2 > y_1$ , 当  $a < 0$  时,

$y_2 < y_1$ , 故②错误. ③ $\because y_1 < 0, y_2 > 0$ ,  $\therefore a + b + c < 0, a - b + c > 0$ ,  $\therefore -a + b - c < 0$ ,  $\therefore 2b < 0$ ,  $\therefore b < 0$ , 故

③正确. ④ $\because b = 2a - 1, c = a - 3$ , 且  $y_1 > 0$ ,  $\therefore a +$

$b + c > 0$ , 把  $b, c$  的值代入  $a + b + c > 0$  得  $a + 2a - 1 +$

$a - 3 > 0$ ,  $\therefore a > 1$ ,  $\therefore b > 1, c > -2$ ,  $\therefore$  抛物线对称轴

在  $y$  轴左侧, 抛物线开口向上,  $\Delta = b^2 - 4ac =$

$(2a-1)^2 - 4a(a-3) = 8a+1 > 9 > 0$ , 故抛物线顶

点一定在第三象限, 故④正确. 综上, 正确的

结论有 3 个, 故选 C.

6. ①②④ 【解析】由题图可得,  $a < 0, c > 0$ .  $\therefore$  对

称轴为直线  $x = 1$ ,  $\therefore -\frac{b}{2a} = 1$ ,  $\therefore b = -2a$ , 故①正

确.  $\therefore$  抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  经过点  $(-2, 0)$ ,

$\therefore$  根据抛物线的对称性可得抛物线与  $x$  轴的

另一个交点坐标为  $(4, 0)$ .  $\therefore$  当  $x > 1$  时,  $y$  随  $x$

的增大而减小, 当  $x = 2$  时,  $y = 4a + 2b + c$ ,  $\therefore 4a +$

$2b + c > 0$ , 故②正确.  $\therefore$  抛物线开口向下, 对称

轴为直线  $x = 1$ ,  $\therefore$  横坐标是  $1-n$  的点的对称

点的横坐标为  $1+n$ .  $\therefore n > m > 0$ ,  $\therefore 1+n > 1+m >$

$1$ ,  $\therefore x = 1+m$  时的函数值大于  $x = 1+n$  时的函

数值,  $\therefore x = 1+m$  时的函数值大于  $x = 1-n$  时的

函数值, 故③错误.  $\therefore b = -2a$ , 抛物线  $y = ax^2 +$

$bx + c$  经过点  $(-2, 0)$ ,  $\therefore 0 = 4a + 4a + c$ , 即  $c =$

$-8a$ ,  $\therefore -\frac{c}{2a} = 4$ .  $\therefore$  抛物线过点  $(4, 0)$ ,  $\therefore$  点

$\left(-\frac{c}{2a}, 0\right)$  一定在此抛物线上, 故④正确. 故答

案为①②④.

7. (1) 【解】 $\therefore$  函数  $y_1$  的图象的对称轴为直线

$x = 1$ ,  $\therefore -\frac{b}{2a} = 1$ . ①  $\therefore$  函数  $y_1$  的图象经过点

$(a, c)$ ,  $\therefore a \times a^2 + ab + c = c$ . ② 联立①②, 解得

$\begin{cases} a = 2, \\ b = -4, \end{cases}$  即  $a$  的值为 2,  $b$  的值为 -4.

(2) 【证明】 $\therefore$  函数  $y_1$  的最大值为  $m$ ,  $\therefore a < 0$ ,

$m = \frac{4ac - b^2}{4a}$ .  $\therefore$  函数  $y_2$  的最小值为  $n$ ,  $\therefore c > 0$ ,

$n = \frac{4ac - b^2}{4c}$ .  $\therefore m + n = 0$ ,  $\therefore \frac{4ac - b^2}{4a} + \frac{4ac - b^2}{4c} = 0$ ,

#### 刷有所得

抛物线与  $y$  轴的交点位置取决于常数项  $c$  的值.

整理,得  $\frac{(4ac-b^2)(a+c)}{4ac} = 0$ .  $\because ac < 0, \therefore 4ac - b^2 < 0, \therefore a+c=0$ .

## 重难专题2 二次函数的综合

### 刷难关

1. 【解】(1)  $A(-1,0), B(3,0), C(0,3)$ .  $\therefore y = -x^2 + 2x + 3$ , 当  $x=0$  时,  $y=3$ , 当  $y=0$  时,  $0 = -x^2 + 2x + 3$ , 解得  $x_1 = -1, x_2 = 3, \therefore A(-1,0), B(3,0), C(0,3)$ .

(2) 存在这样的点  $P$ , 使得  $S_{\triangle COP} = S_{\triangle BOP}$ . 设  $P(m,n)$ .  $\because B(3,0), C(0,3), \therefore OB=OC=3$ ,  $\therefore S_{\triangle COP} = \frac{1}{2}OC \cdot m = \frac{3m}{2}, S_{\triangle BOP} = \frac{1}{2}OB \cdot n = \frac{3n}{2}$ .  $\therefore S_{\triangle COP} = S_{\triangle BOP}, \therefore m=n, \therefore P(m,m)$ ,

$\therefore m = -m^2 + 2m + 3$ , 解得  $m = \frac{\sqrt{13}+1}{2}$  (负值已舍去),  $\therefore P$  点坐标为  $(\frac{\sqrt{13}+1}{2}, \frac{\sqrt{13}+1}{2})$ .

(3) 存在点  $Q$ , 使得以点  $A, C, Q$  为顶点的三角形是等腰三角形. 设直线  $BC$  的表达式为  $y = kx + t$ , 则  $\begin{cases} 3k+t=0 \\ t=3 \end{cases}$ , 解得  $\begin{cases} k=-1 \\ t=3 \end{cases}, \therefore y = -x + 3$ . 设  $Q(p, -p+3)$ .  $\because A(-1,0), C(0,3), \therefore AC^2 = 1^2 + 3^2 = 10, AQ^2 = (p+1)^2 + (3-p)^2 = 2p^2 - 4p + 10, CQ^2 = p^2 + p^2 = 2p^2$ . 当  $AC=CQ$  时,  $2p^2 = 10$ , 解得  $p = \pm\sqrt{5}, \therefore Q(\sqrt{5}, -\sqrt{5}+3)$  或  $Q(-\sqrt{5}, \sqrt{5}+3)$ ; 当  $AC=AQ$  时,  $10 = 2p^2 - 4p + 10$ , 解得  $p=0$  (舍去) 或  $p=2, \therefore Q(2,1)$ ; 当  $AQ=CQ$  时,  $2p^2 = 2p^2 - 4p + 10$ , 解得  $p = \frac{5}{2}, \therefore Q(\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$ .

综上可得,  $Q$  点坐标为  $(\sqrt{5}, -\sqrt{5}+3)$  或  $(-\sqrt{5}, \sqrt{5}+3)$  或  $(2,1)$  或  $(\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$ .

2. 【解】(1) 令  $y = -2x + 6 = 0$ , 解得  $x=3$ ; 令  $x=0$ , 则  $y=6, \therefore A(3,0), B(0,6)$ . 把  $A(3,0), B(0,6)$  代入  $y = -x^2 + bx + c$ , 得  $\begin{cases} -9+3b+c=0 \\ c=6 \end{cases}$ , 解得

$\begin{cases} b=1 \\ c=6 \end{cases}, \therefore$  抛物线所对应的函数表达式为  $y = -x^2 + x + 6$ .

(2) 存在. 设点  $D(t, -t^2+t+6)$ , 则  $E(t, -2t+6), C(t,0), \therefore EC = -2t+6, AC = 3-t, DE = -t^2+3t$ .  $\because \triangle BDE$  和  $\triangle ACE$  相似,  $\angle BED = \angle AEC, \therefore \triangle ACE \sim \triangle BDE$  或  $\triangle ACE \sim \triangle DBE$ .

①如图(1), 当  $\triangle ACE \sim \triangle BDE$  时,  $\angle BDE = \angle ACE = 90^\circ, \therefore BD \parallel AC, \therefore$  点  $D$  纵坐标为 6,  $\therefore -t^2+t+6=6$ , 解得  $t=0$  (舍去) 或  $t=1, \therefore D(1,6)$ ;

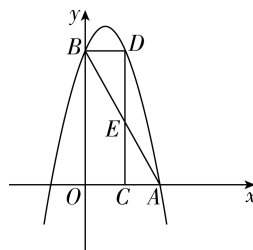
### 思路分析

(3) 先分别把  $AC^2, AQ^2, CQ^2$  表示出来, 然后分情况讨论求解即可.

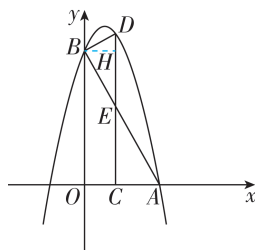
### 关键点拨

(2) 分  $\triangle ACE \sim \triangle BDE$  和  $\triangle ACE \sim \triangle DBE$  两种情况讨论即可.

(3) 分点  $D$  在  $F$  左侧和点  $D$  在  $F$  右侧两种情况.



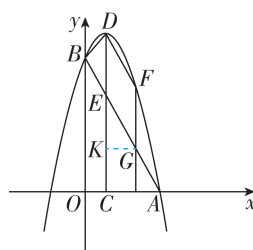
图(1)



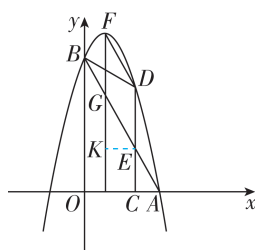
图(2)

②如图(2), 当  $\triangle ACE \sim \triangle DBE$  时,  $\angle BDE = \angle CAE$ , 过  $B$  作  $BH \perp DC$  于  $H, \therefore H(t, 6), \angle BHD = 90^\circ, \therefore BH = t, DH = -t^2 + t, \therefore \frac{BH}{DH} = \tan \angle BDE = \tan \angle CAE = \frac{OB}{OA}, \therefore \frac{t}{-t^2+t} = \frac{6}{3} = 2, \therefore -2t^2 + 2t = t$ , 解得  $t=0$  或  $t = \frac{1}{2}, \therefore D(\frac{1}{2}, \frac{25}{4})$ .  
综上所述, 点  $D$  的坐标为  $(1,6)$  或  $(\frac{1}{2}, \frac{25}{4})$ .

(3) ①如图(3), 当点  $D$  在点  $F$  左侧时,  $\because$  四边形  $EGFD$  为菱形,  $\therefore DE \parallel FG, DE = FG, ED = EG$ . 设点  $D(m, -m^2+m+6), E(m, -2m+6), F(n, -n^2+n+6), G(n, -2n+6), \therefore DE = -m^2+3m, FG = -n^2+3n, \therefore -m^2+3m = -n^2+3n$ , 即  $(m-n)(m+n-3) = 0$ .  $\because m-n \neq 0, \therefore m+n-3=0$ , 即  $m+n=3. \therefore A(3,0), B(0,6), \therefore AO=3, BO=6, \therefore AB = \sqrt{AO^2+BO^2} = 3\sqrt{5}$ . 过点  $G$  作  $GK \perp DC$  于  $K, \therefore KG \parallel AC, \therefore \angle EGK = \angle BAC, \therefore \frac{KG}{EG} = \cos \angle EGK = \cos \angle BAC = \frac{OA}{AB}$ , 即  $\frac{n-m}{EG} = \frac{3}{3\sqrt{5}}, \therefore EG = \sqrt{5}(n-m) = \sqrt{5}(3-2m). \therefore DE = EG, \therefore -m^2+3m = \sqrt{5}(3-2m), \therefore m^2 - (3+2\sqrt{5})m + 3\sqrt{5} = 0$ , 解得  $m = \frac{3+2\sqrt{5}+\sqrt{29}}{2}$  (不合题意, 舍去) 或  $m = \frac{3+2\sqrt{5}-\sqrt{29}}{2}, \therefore$  点  $D$  的横坐标为  $\frac{3+2\sqrt{5}-\sqrt{29}}{2}$ .



图(3)



图(4)

②如图(4), 当点  $D$  在点  $F$  右侧时, 过点  $E$  作  $EK \perp FG$ . 同①方法可得点  $D$  的横坐标为  $\frac{3-2\sqrt{5}+\sqrt{29}}{2}$ . 综上, 点  $D$  的横坐标为  $\frac{3+2\sqrt{5}-\sqrt{29}}{2}$  或  $\frac{3-2\sqrt{5}+\sqrt{29}}{2}$ .

3.【解】(1) 令  $y=0$ , 则  $mx^2+4mx-12m=0$ , 解得  $x=2$  或  $x=-6$ ,  $\therefore M(-6,0), N(2,0)$ ,  $\therefore$  抛物线  $C_1$  的表达式为  $y=m(x+6)(x-2)$ . 将点  $A(0,-1)$  代入, 得  $-12m=-1$ , 解得  $m=\frac{1}{12}$ ,

$\therefore$  抛物线  $C_1$  的表达式为  $y=\frac{1}{12}(x^2+4x-12)=\frac{1}{12}x^2+\frac{1}{3}x-1$ .

(2)  $\triangle MND$  是等腰三角形. 理由:

$\because m=\frac{3}{4}$ ,  $\therefore C_2:y=\frac{3}{4}x^2+3x-9=\frac{3}{4}(x+2)^2-12$ ,  $\therefore D(-2,-12)$ . 由(1)得  $M(-6,0), N(2,0)$ ,  $\therefore MD=4\sqrt{10}, ND=4\sqrt{10}, MN=8$ ,  $\therefore MD=ND$ ,  $\therefore \triangle MND$  是等腰三角形.

(3) 抛物线  $C_2$  在第三象限内存在一点  $Q$ , 使得  $S_{\triangle APM}=\frac{3}{2}S_{\triangle ONQ}$ ,  $Q$  点坐标为  $(-\frac{\sqrt{134}}{3}-2, -\frac{5}{6})$  或  $(-\sqrt{14}-2, -\frac{3}{2})$ .  $\because$  点  $P(t, -\frac{5}{4})$  是抛物线  $C_1$  上一点,  $\therefore -\frac{5}{4}=\frac{1}{12}(t^2+4t-12)$ , 解得

$t=-1$  或  $t=-3$ ,  $\therefore P(-1, -\frac{5}{4})$  或  $P(-3, -\frac{5}{4})$ .

设直线  $AM$  的表达式为  $y=kx+b$ ,

$\therefore \begin{cases} b=-1, \\ -6k+b=0, \end{cases}$  解得  $\begin{cases} k=-\frac{1}{6}, \\ b=-1, \end{cases} \therefore y=-\frac{1}{6}x-1$ .

过点  $P$  作  $PG \parallel y$  轴交  $AM$  于点  $G$ . 当  $P$  点坐标为  $(-1, -\frac{5}{4})$  时,  $G(-1, -\frac{5}{6})$ ,  $\therefore PG=\frac{5}{12}$ ,

$\therefore S_{\triangle APM}=\frac{1}{2} \times 6 \times \frac{5}{12}=\frac{5}{4}$ .

$\because S_{\triangle APM}=\frac{3}{2}S_{\triangle ONQ}$ ,  $\therefore \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \times 2 \times |y_Q|=\frac{5}{4}$ ,

$\therefore y_Q=-\frac{5}{6}$ ,  $\therefore Q(-\frac{\sqrt{134}}{3}-2, -\frac{5}{6})$ .

当  $P$  点坐标为  $(-3, -\frac{5}{4})$  时,  $G(-3, -\frac{1}{2})$ ,

$\therefore PG=\frac{3}{4}$ ,  $\therefore S_{\triangle APM}=\frac{1}{2} \times 6 \times \frac{3}{4}=\frac{9}{4}$ .

$\because S_{\triangle APM}=\frac{3}{2}S_{\triangle ONQ}$ ,  $\therefore \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \times 2 \times |y_Q|=\frac{9}{4}$ ,

$\therefore y_Q=-\frac{3}{2}$ ,  $\therefore Q(-\sqrt{14}-2, -\frac{3}{2})$ .

综上所述,  $Q$  点坐标为  $(-\frac{\sqrt{134}}{3}-2, -\frac{5}{6})$

或  $(-\sqrt{14}-2, -\frac{3}{2})$ .

4.【解】(1)  $\because$  抛物线  $M:y=ax^2+bx-1$  的顶点为  $A$ , 且  $A$  点横坐标为 2,  $\therefore -\frac{b}{2a}=2$ ,  $\therefore b=-4a$ .

#### 思路分析

(2) 过点  $A$  作  $AD \perp BC$  于点  $D$ , 作  $AE \parallel y$  轴交直线  $l$  于点  $E$ , 先求出  $AE=1-\frac{b}{4}-(-\frac{b^2}{4}-1)=\frac{1}{4}b^2-\frac{b}{4}+2$ , 再根据  $\triangle ADE \sim \triangle BOC$  即可求出  $d$  关于  $b$  的函数表达式, 然后利用二次函数的性质求解即可.

#### 思路分析

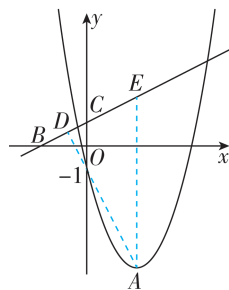
(3) 分  $a>0$  和  $a<0$  两种情况讨论. 当  $a>0$  时, 易知整点个数大于 9, 当  $a<0$  时, 需要同时满足: 当  $x=1$  时,  $1 \leq y<2$ , 当  $x=2$  时,  $1 < y<2$ , 进而建立不等式组求解即可.

$\because$  点  $(4, t)$  在抛物线  $M$  上,  $\therefore t=16a+4b-1=16a-16a-1=-1$ ,  $\therefore t$  的值为  $-1$ .

(2) 如图(1), 过点  $A$  作  $AD \perp BC$  于点  $D$ , 作  $AE \parallel y$  轴交直线  $l$  于点  $E$ , 则  $\angle ADE=90^\circ$ .  $\because$  直线  $l:y=\frac{1}{2}x+1$  交  $x$  轴于点  $B$ , 交  $y$  轴于点  $C$ ,  $\therefore B(-2, 0), C(0, 1)$ ,  $\therefore OB=2, OC=1$ ,  $\therefore BC=\sqrt{OB^2+OC^2}=\sqrt{5}$ .  $\because a=1$ ,  $\therefore$  抛物线  $M:y=x^2+bx-1=(x+\frac{b}{2})^2-\frac{b^2}{4}-1$ ,  $\therefore$  顶点  $A$  的坐标为  $(-\frac{b}{2}, -\frac{b^2}{4}-1)$ . 把  $x=-\frac{b}{2}$  代入  $y=\frac{1}{2}x+1$  中, 得  $y=\frac{1}{2} \cdot (-\frac{b}{2})+1=1-\frac{b}{4}$ ,  $\therefore E(-\frac{b}{2}, 1-\frac{b}{4})$ ,  $\therefore AE=1-\frac{b}{4}-(-\frac{b^2}{4}-1)=\frac{1}{4}b^2-\frac{b}{4}+2$ .  $\because AE \parallel y$  轴,  $\therefore \angle DEA=\angle OCB$ . 又  $\because \angle ADE=\angle BOC=90^\circ$ ,  $\therefore \triangle ADE \sim \triangle BOC$ ,  $\therefore \frac{AD}{BO}=\frac{AE}{BC}$ ,

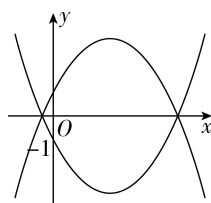
即  $AD=\frac{BO}{BC} \cdot AE=\frac{2}{\sqrt{5}}(\frac{1}{4}b^2-\frac{b}{4}+2)=\frac{\sqrt{5}}{10}b^2-\frac{\sqrt{5}}{10}b+\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ,  $\therefore d=\frac{\sqrt{5}}{10}b^2-\frac{\sqrt{5}}{10}b+\frac{4\sqrt{5}}{5}$ , 即  $d=\frac{\sqrt{5}}{10}(b-\frac{1}{2})^2+\frac{31\sqrt{5}}{40}$ .

当  $b=\frac{1}{2}$  时,  $d$  有最小值  $\frac{31\sqrt{5}}{40}$ , 此时抛物线  $M$  的表达式为  $y=x^2+\frac{1}{2}x-1$ .



图(1)

(3)  $\because b=-4a$ ,  $\therefore y=ax^2-4ax-1$ ,  $\therefore$  抛物线对称轴为直线  $x=2$ , 且图象必过点  $(0, -1)$ . 当  $a>0$  时, 抛物线开口向上, 如图(2), 令  $y=-1$ , 则整点有  $(0, -1), (1, -1), (2, -1)$ ,



图(2)

$(3, -1), (4, -1)$ , 根据对称性, 整点显然超过 9 个, 不符合题意. 当  $a<0$  时, 开口向下, 如图(3), 要保证封闭区域内(包括边界)共有 9 个整点, 需要同时满足: 当  $x=1$  时,  $1 \leq y<2$ , 当



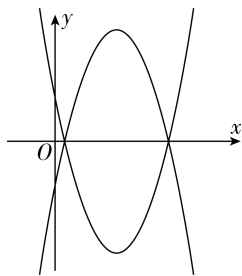
$x=2$  时,  $1 < y < 2$ , 即

$$\begin{cases} 1 \leq -3a-1 < 2, \\ 1 < -4a-1 < 2, \end{cases}$$

解得

$$-\frac{3}{4} < a \leq -\frac{2}{3},$$

故  $a$  的取值范围为  $-\frac{3}{4} < a \leq -\frac{2}{3}$ .



图(3)

## 全章综合训练

### 刷中考

**1. A** 【解析】 $\because$  点  $A(-2, y_1)$  和  $B(1, y_2)$  在抛物线  $y=3x^2+bx+1$  上,  $\therefore y_1=3 \times (-2)^2-2b+1=13-2b, y_2=3 \times 1^2+b+1=4+b. \therefore 3 < b < 4, \therefore 5 < 13-2b < 7, 7 < 4+b < 8$ , 即  $5 < y_1 < 7, 7 < y_2 < 8, \therefore 1 < 5 < y_1 < 7 < y_2 < 8$ , 即  $1 < y_1 < y_2$ , 故选 A.

**2. D** 【解析】由题意可得, 方程  $ax^2-2ax+a-3=0 (a \neq 0)$  的两根异号,  $\therefore x_1 x_2 = \frac{a-3}{a} < 0$ , 解得  $0 < a < 3, \therefore$  二次项系数  $a > 0, \therefore$  图象开口向上, 故 A 不符合题意;  $\because$  抛物线  $y=ax^2-2ax+a-3 (a \neq 0)$  的对称轴为直线  $x=-\frac{-2a}{2a}=1, \therefore$  当  $x > 1$  时,  $y$  的值随  $x$  值的增大而增大, 故 B 不符合题意;  $\because$  当  $x=1$  时,  $y=a-2a+a-3=-3, \therefore$  函数的最小值为  $-3$ , 故 C 不符合题意; 当  $x=2$  时,  $y=4a-4a+a-3=a-3. \therefore 0 < a < 3, \therefore a-3 < 0$ , 即当  $x=2$  时,  $y < 0$ , 故 D 符合题意. 故选 D.

**3. C** 【解析】 $\because$  抛物线开口向上,  $\therefore a > 0. \therefore$  抛物线对称轴在  $y$  轴右侧,  $\therefore -\frac{b}{2a} > 0, \therefore b < 0. \therefore$  抛物线与  $y$  轴交于负半轴,  $\therefore c < 0, \therefore abc > 0$ , 故 A 选项错误. 由题图易知  $-\frac{b}{2a} < 1, \therefore -b < 2a, \therefore 2a+b > 0$ , 故 B 选项错误.  $\because$  抛物线过点  $(2, 0), \therefore 4a+2b+c=0, \therefore c=-4a-2b, \therefore 2b-c=2b+4a+2b=4(a+b)$ . 由题图易知  $-\frac{b}{2a} > \frac{1}{2}, \therefore a+b < 0, \therefore 2b-c < 0$ , 故 C 选项正确. 由图象可知, 当  $x=-1$  时,  $y > 0, \therefore a-b+c > 0$ , 故 D 选项错误. 故选 C.

**4. (1, 2)** 【解析】将抛物线  $y=-x^2$  先向右平移 1 个单位长度, 再向上平移 2 个单位长度得到的抛物线的表达式为  $y=-(x-1)^2+2, \therefore$  顶点坐标为  $(1, 2)$ , 故答案为  $(1, 2)$ .

**5. 2** 【解析】抛物线  $y=ax^2+bx+3$  向下平移 5 个单位长度后得到的抛物线表达式为  $y=ax^2+$

### 关键点拨

(3) 求  $W$  的最值的关键是列出  $W$  关于  $a$  的函数表达式, 再利用二次函数的性质求最值.

### 思路分析

(3) 设该平台的高度为  $k$  cm. 根据题意, 得到新的抛物线的表达式为  $y=-\frac{3}{320}(x-80)^2+60+k$ . 根据仿青蛙机器人从平台上起跳, 且刚好安全通过该障碍物, 得到抛物线过点  $(120, 51)$ , 代入求解即可.

$bx+3-5=ax^2+bx-2$ . 把点  $(-2, 4)$  代入, 得  $4=a \times (-2)^2-2b-2$ , 整理得  $2a-b=3, \therefore 6a-3b-7=3(2a-b)-7=3 \times 3-7=2$ . 故答案为 2.

**6. 【解】**(1) 设 A 款“哪吒”纪念品每个进价为  $x$  元, B 款“哪吒”纪念品每个进价为  $y$  元.

由题意得  $\begin{cases} 200x+300y=14\,000, \\ 100x+200y=8\,000, \end{cases}$  解得  $\begin{cases} x=40, \\ y=20. \end{cases}$

答: A 款“哪吒”纪念品每个进价为 40 元, B 款“哪吒”纪念品每个进价为 20 元.

(2) 设购进 B 款纪念品  $m$  个, 则购进 A 款纪念品  $(400-m)$  个.

由题意得  $40(400-m)+20m \leq 12\,000$ , 解得  $m \geq 200, \therefore m$  的最小值为 200.

答: 至少需要购进 B 款纪念品 200 个.

(3) 由题意得  $W=(a-40)[200-5(a-60)]= (a-40)(500-5a)=-5(a-70)^2+4\,500$ .

$\therefore -5 < 0, 60 \leq a \leq 100, \therefore$  当  $a=70$  时,  $W$  最大, 最大值为 4 500.

**7. 【解】**(1) 由题意可知  $OM=160$  cm, 其运动路线的最高点距地面 60 cm, 根据抛物线的对称性可知对称轴为直线  $x=80, \therefore$  顶点  $N$  的坐标为  $(80, 60)$ .

设抛物线的表达式为  $y=a(x-80)^2+60$ .

$\because O(0, 0)$  在抛物线上,

$\therefore 6\,400a=-60, \therefore a=-\frac{3}{320},$

$\therefore$  该抛物线的函数表达式为  $y=-\frac{3}{320}(x-80)^2+60$ .

(2)  $\because$  抛物线的形状不变, 且过点  $P(0, 75), \therefore$  从点  $P$  起跳的运动路线可以看作由 (1) 中的抛物线向上平移 75 个单位长度得到的,

$\therefore$  新抛物线的表达式为  $y=-\frac{3}{320}(x-80)^2+60+75=-\frac{3}{320}(x-80)^2+135,$

当  $y=0$  时,  $-\frac{3}{320}(x-80)^2+135=0,$

解得  $x_1=200, x_2=-40$  (舍去),  $\therefore Q(200, 0),$

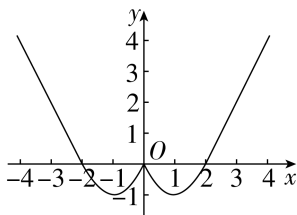
故起跳点  $P$  与落地点  $Q$  的水平距离  $OQ$  的长为 200 cm.

(3) 6 cm.

以原起跳点 (即距离  $AB$  左侧 80 cm 处) 为原点  $O, BC$  所在直线为  $x$  轴, 建立平面直角坐标系. 设该平台的高度为  $k$  cm, 则易知从平台上起跳对应抛物线的表达式为  $y=-\frac{3}{320}(x-80)^2+60+k. \therefore \angle ABC = \angle BCD = 90^\circ, AB =$

57 cm,  $BC=40$  cm,  $CD=48$  cm, 仿青蛙机器人从距离  $AB$  左侧 80 cm 处的地面起跳, 且仿青蛙机器人从平台上起跳刚好安全通过该障碍物,  $\therefore$  仿青蛙机器人需经过  $CD$  正上方 3 cm 处, 即抛物线经过点  $(80+40, 48+3)$ , 即  $(120, 51)$ ,  $\therefore$  把  $(120, 51)$  代入  $y = -\frac{3}{320}(x-80)^2 + 60+k$ , 得  $51 = -\frac{3}{320}(120-80)^2 + 60+k$ , 解得  $k=6$ , 故该平台的高度为 6 cm.

**8. A** 【解析】 $\because$  函数图象关于  $y$  轴对称, 当  $0 \leq x \leq 2$  时,  $y = x^2 - 2x$ ; 当  $x > 2$  时,  $y = 2x - 4$ ,  $\therefore$  当  $-2 \leq x < 0$  时,  $y = x^2 + 2x$ ; 当  $x < -2$  时,  $y = -2x - 4$ . 画出函数图象如图所示. 当  $-2 \leq x < 0$  时, 联立  $\begin{cases} y = x^2 + 2x, \\ y = x + b, \end{cases}$  得  $x^2 + x - b = 0$ , 当  $\Delta = 1 + 4b = 0$ , 即  $b = -\frac{1}{4}$  时, 直线  $y = x + b$  与抛物线  $y = x^2 + 2x$  ( $-2 \leq x < 0$ ) 相切. 当直线  $y = x + b$  过  $(0, 0)$  时,  $b = 0$ . 结合图象可知, 当  $-\frac{1}{4} < b < 0$  时, 直线  $y = x + b$  与这个函数图象有且仅有四个不同交点. 故选 A.



**9. B** 【解析】 $\because$  抛物线过点  $(1, 0)$  和  $(m, 0)$  ( $2 < m < 3$ ),  $\therefore$  设抛物线表达式为  $y = a(x-1)(x-m)$ ,  $\therefore y = ax^2 - a(1+m)x + am$ ,  $\therefore b = -a(1+m)$ ,  $c = am$ .  $\because a > 0$  且  $m > 2$ ,  $\therefore b < 0, c > 0$ ,  $\therefore bc < 0$ , 故结论①正确.  $\because b = -a(1+m)$ ,  $\therefore 3a + b = 3a - a(1+m) = a(2-m)$ .  $\because 2 < m < 3$ ,  $\therefore 2-m < 0$ ,  $\therefore 3a + b < 0$ , 故结论②错误. 抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  与直线  $y = kx + c$  的交点横坐标满足  $ax^2 + (b-k)x = 0$ , 解得  $x = 0$  或  $x = \frac{k-b}{a}$ . 若点  $A$  为  $(0, c)$ , 则对称点  $A'$  的横坐标为  $2 \cdot \left[-\frac{-a(1+m)}{2a}\right] = 1+m$ ,  $\therefore AA' = 1+m$ .  $\because 2 < m < 3$ ,  $\therefore 3 < AA' < 4$ . 若点  $A$  的横坐标为  $\frac{k-b}{a}$ , 则对称点  $A'$  的横坐标为  $-\frac{k}{a}$ .  $\therefore |AA'| = \left|\frac{b-2k}{a}\right|$ , 故结论③不一定成立. 当  $x_2 = 4$  时, 方程  $ax^2 + (b-k)x = 0$  的根为  $x = 0$  或  $x = 4$ , 即  $ax^2 + (b-k)x = ax(x-4)$ .  $\therefore a > 0$ ,  $\therefore$  不

### 思路分析

(3) 先求出  $C$  点坐标, 进而求出直线  $PQ$  的表达式, 联立抛物线与直线  $AB$  的表达式, 根据根与系数的关系, 结合中点坐标公式求出  $M$  点坐标, 同理求出  $N$  点坐标. 作  $MH \perp CT$ ,  $NF \perp CT$ . 根据  $TC$  平分  $\angle MTN$ , 得到  $\tan \angle NTF = \tan \angle MTH$ . 设  $T(1, t)$ , 根据正切的定义, 列出比例式进行求解即可.

### 思路分析

先根据函数图象关于  $y$  轴对称, 求出  $x < 0$  时的函数表达式, 并画出函数图象. 将直线  $y = x + b$  在坐标系中平移, 当直线  $y = x + b$  恰好过原点和恰好与抛物线  $y = x^2 + 2x$  ( $-2 \leq x < 0$ ) 有一个交点时, 与函数图象有三个交点, 结合图象即可求出函数图象与直线  $y = x + b$  有且仅有四个不同交点时  $b$  的取值范围.

等式  $ax(x-4) < 0$  的解集为  $0 < x < 4$ , 故结论④正确. 综上, 正确的结论为①④, 共 2 个, 故选 B.

**10. 【解】**(1)  $\because$  抛物线  $y = ax^2 + bx$  过点  $(-1, 3)$ , 且对称轴为直线  $x = 1$ ,  $\therefore \begin{cases} -\frac{b}{2a} = 1, \\ a - b = 3, \end{cases}$  解得  $\begin{cases} a = 1, \\ b = -2, \end{cases}$   $\therefore$  该抛物线的函数表达式为  $y = x^2 - 2x$ . (2) 当  $k = 1$  时,  $y = x - 1$ , 当  $x = 0$  时,  $y = -1$ , 当  $x = 2$  时,  $y = 1$ ,  $\therefore D(0, -1), E(2, 1)$ .  $\because$  抛物线  $y = (x-h)^2 - 1$ ,  $\therefore$  其顶点在直线  $y = -1$  上. 当抛物线  $y = (x-h)^2 - 1$  与直线  $DE$  只有一个公共点时, 令  $(x-h)^2 - 1 = x - 1$ , 整理, 得  $x^2 - (2h+1)x + h^2 = 0$ ,  $\therefore \Delta = (2h+1)^2 - 4h^2 = 0$ , 解得  $h = -\frac{1}{4}$ .

经检验,  $h = -\frac{1}{4}$  时, 满足题意.

将抛物线  $y = (x-h)^2 - 1$  从  $h = -\frac{1}{4}$  时的位置开始向右移动, 直至抛物线与线段  $DE$  只有一个交点为  $E(2, 1)$  时, 抛物线  $y = (x-h)^2 - 1$  与线段  $DE$  均有公共点. 当抛物线  $y = (x-h)^2 - 1$  过点  $E(2, 1)$  时,  $(2-h)^2 - 1 = 1$ , 解得  $h = 2 - \sqrt{2}$  或  $h = 2 + \sqrt{2}$ ,  $\therefore$  当  $-\frac{1}{4} \leq h \leq 2 + \sqrt{2}$  时, 抛物线  $y = (x-h)^2 - 1$  与线段  $DE$  有公共点.

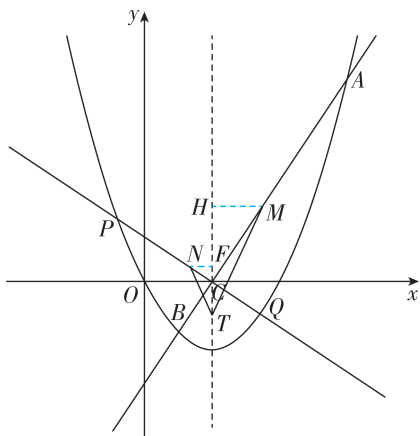
(3) 存在.

对于  $y = kx - k = k(x-1)$ , 当  $y = 0$  时,  $x = 1$ ,  $\therefore C(1, 0)$ .  $\because$  抛物线的对称轴为直线  $x = 1$ ,  $\therefore$  点  $C$  在抛物线的对称轴上.  $\because PQ$  过点  $C$ , 且与直线  $AB$  垂直,  $\therefore$  易得直线  $PQ$  的表达式为  $y = -\frac{1}{k}(x-1)$ , 即  $y = -\frac{1}{k}x + \frac{1}{k}$ . 令  $kx - k = x^2 - 2x$ , 整理, 得  $x^2 - (k+2)x + k = 0$ ,  $\therefore x_A + x_B = k+2$ ,  $\therefore y_A + y_B = kx_A - k + kx_B - k = k(x_A + x_B) - 2k = k^2$ .  $\because M$  为  $AB$  的中点,  $\therefore M\left(\frac{k+2}{2}, \frac{k^2}{2}\right)$ . 令  $-\frac{1}{k}x + \frac{1}{k} = x^2 - 2x$ , 整理得  $x^2 - \left(2 - \frac{1}{k}\right)x - \frac{1}{k} = 0$ ,  $\therefore x_P + x_Q = 2 - \frac{1}{k}$ ,

$$\therefore y_P + y_Q = -\frac{1}{k}x_P + \frac{1}{k} - \frac{1}{k}x_Q + \frac{1}{k} = -\frac{1}{k}(x_P + x_Q) + \frac{2}{k} = \frac{1}{k^2}.$$

$$\therefore N \text{ 为 } PQ \text{ 的中点}, \therefore N\left(1 - \frac{1}{2k}, \frac{1}{2k^2}\right).$$

如图,过  $M$  作  $MH$  垂直于抛物线对称轴于  $H$ ,过  $N$  作  $NF$  垂直于抛物线对称轴于  $F$ .



$$\therefore TC \text{ 平分 } \angle MTN, \therefore \angle NTF = \angle MTH, \\ \therefore \tan \angle NTF = \tan \angle MTH, \therefore \frac{MH}{TH} = \frac{NF}{TF}.$$

$$\text{设 } T(1, t), \text{ 则 } \frac{\left| \frac{k+2}{2} - 1 \right|}{\left| t - \frac{k^2}{2} \right|} = \frac{\left| 1 - 1 + \frac{1}{2k} \right|}{\left| t - \frac{1}{2k^2} \right|},$$

$$\therefore \text{易得 } t = -\frac{1}{2}, \therefore T\left(1, -\frac{1}{2}\right).$$

故抛物线的对称轴上存在  $T\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ , 使得  $TC$  总是平分  $\angle MTN$ .

### 刷章测

1. **B** 【解析】 $\because$  二次函数为  $y=3(x-1)^2+2$ ,  $\therefore$  函数图象开口向上, 对称轴是直线  $x=1$ , 顶点坐标是  $(1, 2)$ ,  $\therefore$  当  $x \geq 1$  时,  $y$  随  $x$  的增大而增大. 二次函数  $y=3(x-1)^2+2$  的图象可由抛物线  $y=3x^2+2$  向右平移 1 个单位得到. 故 B 正确.

2. **D** 【解析】由  $c < 0$  可排除 A、C 选项; 由 B 选项中抛物线开口向上, 可知  $a > 0$ , 当  $a > 0, b > 0$  时, 对称轴在  $y$  轴左侧, 故排除 B 选项; 由 D 选项中抛物线开口向下, 可知  $a < 0$ , 当  $a < 0, b > 0$  时, 对称轴在  $y$  轴右侧, 故选项 D 符合题意. 故选 D.

3. **A** 【解析】令  $3x+19=x^2+4x-1$ , 整理得  $x^2+x-20=0$ , 解得  $x_1=-5, x_2=4$ ,  $\therefore$  直线  $y=3x+19$  与抛物线的交点的横坐标为  $-5, 4$ .  $\because y=x^2+4x-1=(x+2)^2-5$ ,  $\therefore$  抛物线开口向上, 对称轴为直线  $x=-2$ , 顶点为  $(-2, -5)$ . 把  $y=-5$  代入  $y=3x+19$ , 解得  $x=-8$ . 若  $y_1=y_2=y_3, x_1 < x_2 <$

### 思路分析

求得直线与抛物线的交点的横坐标, 把抛物线的顶点纵坐标代入直线表达式, 求得对应的  $x$  的值, 即可求得  $x_1$  的取值范围, 根据抛物线的对称性求得  $x_2+x_3=-4$ , 从而求得  $x_1+x_2+x_3$  的取值范围.

$x_3$ , 则  $-8 < x_1 < -5, x_2+x_3=-4, \therefore -12 < x_1+x_2+x_3 < -9$ , 故选 A.

4. **B** 【解析】设饲养室的面积为  $S \text{ m}^2$ , 垂直于墙体的围栏长为  $x \text{ m}$ , 则平行于墙体的围栏长为  $22-(3x-1)=(23-3x) \text{ m}$ .  $\because$  平行于墙体一侧留了一处  $1 \text{ m}$  的门,  $\therefore$  饲养室的长为  $23-3x+1=(24-3x) \text{ m}$ ,  $\therefore$  饲养室的面积可表示为  $S=x(24-3x)=-3x^2+24x=-3(x-4)^2+48$ ,  $\therefore$  当  $x=4$  时, 饲养室的面积最大,  $\therefore$  利用墙体的长度为  $24-3x=24-3 \times 4=12(\text{m})$ , 故选 B.

### 5. B 【解析】

①	由图象可知, $a < 0, c > 0, -\frac{b}{2a} > 0, \therefore b > 0$ , $\therefore abc < 0$ , 故①正确
②	$\because -\frac{b}{2a} = 1, \therefore b = -2a$ . $\because$ 当 $x = -1$ 时, $y = 0$ , 即 $a - b + c = 0, \therefore a - b + c = 3a + c = 0. \therefore a < 0, \therefore 8a + c = 5a + 3a + c < 0$ , 故②正确
③	$\because$ 对称轴为直线 $x = 1$ , 与 $x$ 轴的一个交点坐标为 $(-1, 0)$ , $\therefore$ 与 $x$ 轴的另一个交点坐标为 $(3, 0)$ , $\therefore$ 不等式 $ax^2 + c > -bx$ 的解集为 $-1 < x < 3$ , 故③不正确
④	由③可知图象过点 $(3, 0)$ , $\therefore$ 当 $x = 3$ 时, $y = 0$ , 即 $9a + 3b + c = 0. \therefore c > 0, \therefore 9a + 3b + 2c > 0$ , 故④不正确
⑤	点 $C(x_1, y_1), D(x_2, y_2)$ 是抛物线上的两点, 若 $1 < x_1 < x_2$ , 则 $y_1 > y_2$ , 故⑤不正确
⑥	$\because$ 图象过点 $(-3, n)$ , $\therefore$ 由对称性可知, 图象也过点 $(5, n)$ . 令 $y = n$ , 则 $ax^2 + bx + c = n$ , 即 $ax^2 + bx + c - n = 0$ 有两个根, 分别是 $-3, 5$ , 故⑥正确

### 思路分析

由平行、角平分线的性质及勾股定理, 可得  $BC = AC = 5$ , 即可得出点  $B$  坐标. 再将点  $A$ , 点  $B$  的坐标代入二次函数表达式, 求解方程组即可.

6.  $y = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{6}x + 4$  【解析】对于  $y = mx^2 + bx + 4$ , 令  $x = 0$ , 得  $y = 4$ ,  $\therefore C(0, 4)$ , 即  $OC = 4$ .  $\because A(-3, 0), \therefore OA = 3, \therefore AC = \sqrt{OA^2 + OC^2} = 5$ .  $\because CB \parallel x$  轴,  $\therefore \angle CBA = \angle BAO$ .  $\because AB$  平分  $\angle CAO, \therefore \angle CAB = \angle BAO, \therefore \angle CAB = \angle CBA, \therefore BC = AC = 5$ .  $\because CB \parallel x$  轴,  $\therefore B(5, 4)$ . 把  $A, B$  两点坐标代入  $y = mx^2 + bx + 4$  中, 得 
$$\begin{cases} 9m - 3b + 4 = 0, \\ 25m + 5b + 4 = 4, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} m = -\frac{1}{6}, \\ b = \frac{5}{6}, \end{cases} \therefore y = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{6}x + 4.$$
 故答案为  $y = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{6}x + 4$ .

7. 4 【解析】以  $A$  为坐标原点,  $AB$  所在直线为  $x$  轴,  $AD$  所在直线为  $y$  轴建立平面直角坐标系. 设抛物线的顶点为  $E$ . 由题意知, 抛物线顶点

$E$  的坐标为  $(4.5, 4.8)$ , 设抛物线的表达式为  $y = a(x - 4.5)^2 + 4.8$ .  $\because AD = 0.75, \therefore D(0, 0.75)$ ,  $\therefore$  将点  $D$  坐标代入抛物线表达式, 得  $0.75 = 4.5^2a + 4.8$ , 解得  $a = -0.2$ ,  $\therefore$  抛物线的表达式为  $y = -0.2(x - 4.5)^2 + 4.8$ , 当  $x = 7.5$  时,  $y = 3$ ,  $\therefore$  点  $M$  坐标为  $(7.5, 3)$ . 设直线  $AM$  的表达式为  $y = kx (k \neq 0)$ . 将点  $M(7.5, 3)$  代入  $y = kx$ , 得  $7.5k = 3, \therefore k = 0.4, \therefore$  直线  $AM$  的表达式为  $y = 0.4x$ . 设在  $MN$  左侧的抛物线上存在一点  $P$ , 过  $P$  作  $x$  轴的垂线交直线  $AM$  于点  $F$ . 设点  $P$  的坐标为  $(m, -0.2(m - 4.5)^2 + 4.8)$ , 则  $F(m, 0.4m)$ ,  $\therefore PF = -0.2(m - 4.5)^2 + 4.8 - 0.4m = -0.2m^2 + 1.4m + 0.75 = -0.2(m - 3.5)^2 + 3.2$ .  $\because$  工人师傅能刷到的最大垂直高度是  $2.4$  米,  $\therefore$  当  $PF = 2.4$  时, 即  $-0.2(m - 3.5)^2 + 3.2 = 2.4$ , 解得  $m_1 = 1.5, m_2 = 5.5$ .  $\because 5.5 - 1.5 = 4$  (米),  $\therefore$  工人师傅刷不到的最大水平宽度为  $4$  米, 故答案为  $4$ .

8.  $-4 < a \leq -3$  或  $3 \leq a < 4$  【解析】 $\because y = ax(x - 4) + m = ax^2 - 4ax + m = a(x - 2)^2 + m - 4a$ ,  $\therefore$  抛物线的对称轴为直线  $x = 2$ , 顶点坐标为  $(2, m - 4a)$ .  $\because$  抛物线与  $x$  轴分别交于  $M, N$  两点 (点  $M$  在点  $N$  的左侧),  $MN = 2, \therefore M(1, 0), N(3, 0)$ .  $\therefore$  在区域  $G$  内的  $x$  轴上已有  $(1, 0), (2, 0), (3, 0)$  这 3 个整点,  $\therefore$  在区域  $G$  内的  $x$  轴的上方或下方还需要有 3 个整点. 令  $y = 0$ , 即  $ax^2 - 4ax + m = 0$ , 则  $x_1 = 1, x_2 = 3, \therefore x_1x_2 = \frac{m}{a} = 3, \therefore m = 3a, \therefore$  抛物线的顶点坐标为  $(2, -a)$ . 当  $a < 0$  时,  $3 \leq -a < 4$ , 解得  $-4 < a \leq -3$ ; 当  $a > 0$  时,  $-4 < -a \leq -3$ , 解得  $3 \leq a < 4, \therefore a$  的取值范围是  $-4 < a \leq -3$  或  $3 \leq a < 4$ .

9. 【解】(1)  $\because$  抛物线开口向下, 抛物线与  $x$  轴的交点为  $(1, 0), (3, 0), \therefore$  方程  $ax^2 + bx + c = 0$  的两个根为  $x_1 = 1, x_2 = 3$ . 由图象可得不等式  $ax^2 + bx + c > 0$  的解集为  $1 < x < 3$ . 故答案为  $x_1 = 1, x_2 = 3; 1 < x < 3$ .

(2)  $\because$  抛物线的顶点的纵坐标为  $2, \therefore$  抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  与直线  $y = 2$  只有一个公共点,  $\therefore$  当  $k < 2$  时, 抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  与直线  $y = k$  有两个公共点, 即方程  $ax^2 + bx + c = k$  有两个不相等的实数根,  $\therefore$  满足条件的  $k$  的取值范围为  $k < 2$ , 故答案为  $k < 2$ .

(3) 由题可得抛物线的表达式为  $y = a(x - 2)^2 + 2$ , 把  $(1, 0)$  代入得  $0 = a + 2, \therefore a = -2, \therefore y = -2(x - 2)^2 + 2, \therefore ax^2 + bx + c - t = 0$  可化为  $t = -2(x - 2)^2 + 2$ . 当  $x = -1$  时,  $t = -2 \times (-1 - 2)^2 + 2 = -16$ , 当  $x = 2$  时,  $t = 2$ , 当  $x = 3$  时,  $t = -2 \times (3 - 2)^2 + 2 = 0, \therefore -16 < t \leq 2$ .

10. 【解】(1) 设“蜀宝”徽章的进价为  $a$  元/个,

则“锦仔”徽章的进价为  $(a + 5)$  元/个.

由题意得  $\frac{3\ 000}{a} = \frac{3\ 500}{a + 5}$ , 解得  $a = 30$ . 经检验,  $a = 30$  是原方程的解, 且符合题意,  $\therefore a + 5 = 30 + 5 = 35$ .

答: “蜀宝”徽章的进价为  $30$  元/个, “锦仔”徽章的进价为  $35$  元/个.

(2) ① 由题意可得  $y = (50 + x - 35)(98 - 2x) = -2x^2 + 68x + 1\ 470, \therefore y$  与  $x$  之间的函数关系式为  $y = -2x^2 + 68x + 1\ 470$ .

②  $\because$  物价部门规定其售价每个不高于  $65$  元,  $\therefore x + 50 \leq 65, \therefore 0 \leq x \leq 15. \therefore$  抛物线  $y = -2x^2 + 68x + 1\ 470$  的对称轴为直线  $x = -\frac{b}{2a} =$

$-\frac{68}{-4} = 17, a = -2 < 0, \therefore$  当  $x < 17$  时,  $y$  随  $x$  的增大而增大,  $\therefore$  当  $x = 15$  时,  $y_{\text{最大}} = 2\ 040$ . 此时销售单价为  $15 + 50 = 65$  (元/个).

答: “锦仔”徽章的销售单价为  $65$  元/个时, 一天获得的利润最大, 最大利润是  $2\ 040$  元.

11. 【解】(1)  $\because$  对称轴为直线  $x = \frac{3}{2}, \therefore -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2}, \therefore b = -3a$ . 将  $A(-1, 0)$  代入  $y = ax^2 + bx - 2$

得  $0 = a - b - 2$ , 则  $0 = a + 3a - 2$ , 解得  $a = \frac{1}{2}, \therefore b = -\frac{3}{2}, \therefore$  抛物线的表达式为  $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 2$ .

(2) 如图(1), 过点  $P$  作  $y$  轴的平行线, 交  $BC$  于点  $D. \because A(-1, 0)$ , 对称轴为直线  $x = \frac{3}{2}, \therefore B(4, 0)$ .

当  $x = 0$  时,  $y = -2, \therefore C(0, -2)$ . 设直线  $BC$  的表达式为  $y = kx + m$ , 将  $B(4, 0), C(0, -2)$  代

入得  $\begin{cases} 0 = 4k + m, \\ -2 = m, \end{cases}$  解得  $\begin{cases} k = \frac{1}{2}, \\ m = -2, \end{cases} \therefore$  直线  $BC$  的

表达式为  $y = \frac{1}{2}x - 2. \therefore \triangle PBC$  的面积为

$\frac{1}{2}PD \cdot OB = 2PD, \therefore$  当  $PD$  的值最大时,

$\triangle PBC$  的面积最大. 设  $P\left(t, \frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}t - 2\right)$ , 则

$D\left(t, \frac{1}{2}t - 2\right), \therefore PD = -\frac{1}{2}t^2 + 2t$ , 当  $t =$

$-\frac{2}{2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)} = 2$  时,  $PD$  的值最大, 即  $\triangle PBC$  的

面积最大,  $\therefore$  此时  $P(2, -3)$ .

$\because$  点  $M$  为抛物线对称轴上一动点,  $MN \perp y$

易错警示

(2) ② 求解实际问题时需注意  $x$  的取值范围, 本题有限制条件“售价每个不高于  $65$  元”, 不能直接令  $x = 17$  求最大利润.

关键点拨

(2) 解答本题的关键在于会用铅垂法求三角形的面积.



